

## ΑΣΚΗΣΗ Α.1

- 1)  $x_1$  = ευτάρια υασινού  
 $x_2$  = " ρυζιού

Το πρόβλημα διαμορφώνεται ως εξής:

$$\max x \quad z = 300x_1 + 520x_2$$

$$\text{ον: } x_1 + x_2 \leq 410 \text{ (δυνατότητα ευτασι)} - \Pi 1$$

$$105x_1 + 210x_2 \leq 52.500 \text{ (προϊνολογισμός)} - \Pi 2$$

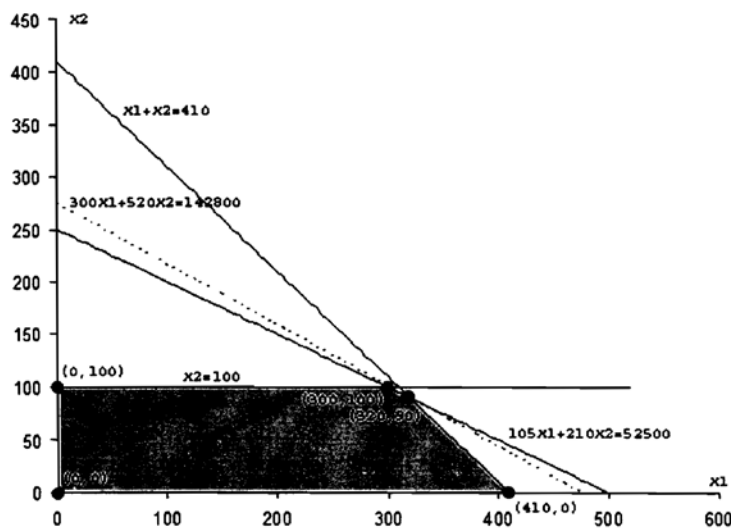
$$x_2 \leq 100 \text{ (μέγιστη ευτασι ρυζιού)} - \Pi 3$$

Για τον  $\Pi 1$ :  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 410$   
 $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 410$

Για τον  $\Pi 2$ :  $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 250$   
 $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 500$

Το σημείο κοπής των  $\Pi 1$  και  $\Pi 2$  βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Από τον } \Pi 1: x_1 + x_2 = 410 &\Rightarrow x_1 = 410 - x_2 \\ \text{Αντικαθιστώντας στον } \Pi 2: x_2 = 90 &\Rightarrow x_1 = 320 \end{aligned}$$



Η αντικειμενική συνάρτηση στα σημεία Α-Ε είναι:

$$Z_A = 0$$

$$Z_B = 300 \cdot 410 + 520 \cdot 0 = 123.000$$

$$Z_C = 300 \cdot 320 + 520 \cdot 90 = 142.800$$

$$Z_D = 300 \cdot 300 + 520 \cdot 100 = 142.000$$

$$Z_E = 300 \cdot 0 + 520 \cdot 100 = 52.000$$

Άρα η βέλτιστη λύση είναι στο σημείο Δ (320, 90) με μέγιστο κέρδος 142.800 €

2) α) Οι  $x_1$  και  $x_2$  είναι βασικές, άρα:

$$K\Phi_1 = C_1 + \max_{\substack{y_{1j} > 0 \\ j \notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 300 + \left( \frac{-80}{2} \right) = 260$$

$$A\Phi_1 = C_1 + \min_{\substack{y_{1j} < 0 \\ j \notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 300 + \left( \frac{-2,09}{-0,0095} \right) = 520$$

$$K\Phi_2 = C_2 + \max_{\substack{y_{2j} > 0 \\ j \notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{2j}} \right\} = 520 + \left( \frac{-2,09}{0,0095} \right) = 300$$

$$A\Phi_2 = C_2 + \min_{\substack{y_{2j} < 0 \\ j \notin B}} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{2j}} \right\} = 520 + \left( \frac{-80}{-1} \right) = 600$$

Άρα:  $C_1 \in [260, 520]$  και  $C_2 \in [300, 600]$

β) Οι δυνάμεις της του περικοπτικού  $\pi_1$  και  $\pi_2$  είναι

$$\pi_1 (\text{έκτασης}) = 80$$

$$\pi_2 (\text{πρωτεύοντος}) = 2,09$$

Αφού μια μονάδα έκτασης αξίζει περισσότερο από μια μονάδα των διαθεσίμων κεφαλαίων έλφασιν πρέπει να δοθεί 6την αύξηση της έκτασης

γ) Η δυνάμει της του  $\pi_1$  (έκταση) είναι 80€. Άρα ένα ευρώ 160δυναμεί με 80€ κέρδους. Άρα η αγορά επιπλέον έκτασης προς 100€ δε συμφέρει.

δ) Αλλάζει το β' μέλος του  $\pi_1$  σε 360. Ο βέλτιστος πινάκας του δυνάμει είναι:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} & 1 & 2 & 3 & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline -360 & 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 80 \\ -52500 & 2 & 0 & 1 & 0,0095 & 0,0095 & -0,0095 & 2,09 \end{array} \quad 220 \rightarrow$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} & 1 & 2 & 3 & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline -360 & 52500 & -100 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 38,75 & -22,25 & -18,75 & & \end{array}$$

↑

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} & 1 & 2 & 3 & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline -360 & 1 & 1 & 105,26 & 0 & -1 & 0 & 300 \\ -100 & 3 & 0 & 105,26 & 1 & 0 & -1 & 200 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc|cc|c} & 1 & 2 & 3 & \bar{1} & \bar{2} & \\ \hline -360 & -52500 & -100 & 0 & 0 & & \\ 0 & -40894 & 0 & -260 & -100 & & \end{array}$$

Άρα με βάση αυτή τη βέλτιστη λύση του δυνάμει, η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι  $x_1 = 260$ ,  $x_2 = 100$  με κέρδος = 30000€

### ΑΣΚΗΣΗ Α.3

1)  $\max x \quad 90x_A + 160x_B + 40x_r + 100x_d$   
 υπ.  $2x_A + 8x_B + 4x_r + 2x_d \leq 480$  (συμπ.)  
 $5x_A + 4x_B + 8x_r + 5x_d \leq 800$  (χυσάλις)  
 $7x_A + 8x_B + 3x_r + 5x_d \leq 900$  (υπόη)  
 $x_A, x_B, x_r, x_d \geq 0$

2)

$c_B$	Βάση	$x_A$	$x_B$	$x_r$	$x_d$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	2	8	4	2	1	0	0	480
0	$\bar{2}$	5	4	8	5	0	1	0	800
0	$\bar{3}$	7	8	3	5	0	0	1	900
$c$		90	160	40	100	0	0	0	
$\bar{c}$		90	160	40	100	0	0	0	$z=0$

↑

Το οδηγό στοιχείο είναι το 8 (ειέρχεται η  $x_B$  και φέρχεται η  $\bar{1}$ )

3) Το ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών είναι:

$$\bar{c}(x_A) = -10, \bar{c}(x_r) = -130, \bar{c}_1 = -12,5 \text{ και } \bar{c}_2 = -15$$

Άρα η λύση είναι βέλτιστη

Από βασικές μεταβλητές είναι οι  $x_B, x_d, \bar{3}$  η βάση είναι:

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ με αντίστροφο } B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15625 & -0.0625 & 0 \\ -0.125 & 0.25 & 0 \\ -0.625 & -0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Οι τιμές των δυνάμεων μεταβλητών αντιστοιχούν στα  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$  οπότε:

$$u_1 = 12,5 \quad u_2 = 15 \text{ και } u_3 = 0$$

5) Θα πρέπει το μοναδιαίο κόστος  $c_r$  να είναι τέτοιο ώστε η  $x_r$  να εισαχθεί στο βασικό, δηλαδή πρέπει:

$$\bar{c}(x_r) \geq 0 \Rightarrow c_r \geq 170$$

6) Θα πρέπει να εισαχθεί μια νέα μεταβλητή  $x_e$  με συντελεστή 2 στον 1<sup>ο</sup> περ., 3 στον 2<sup>ο</sup> και 20<sup>ο</sup> στον 3<sup>ο</sup>.

Η νέα στήλη που εισάγεται στον πίνακα simplex του ερωτήματος (3) είναι:

$$y_r = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.5 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

Το ΟΚΕ της νέας μεταβλητής είναι 50, άρα θα μπορούσε να υπάρξει υπερφόρτωση η παραγωγή του νέου προϊόντος

7) Η δυνάμει μεταβλητή  $u_3 = 0$  άρα δεν υπάρχει η ευνοϊκότητα της τυχόνς αύξησης. Αντίθετα  $u_1 = 12,5$  άρα υπάρχει η ευνοϊκότητα της τυχόνς αύξησης.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.5

- a)  $x$  = εργατοϋρες που θα ασφαλισθούν από μόνιμο προσωπικό  
 $y_i$  = " " " " " έλταται " το μήνα  $i$

$Z =$  κόστος για όλο το τρίμηνο

Οι τρεις περιγραφικοί διασαφηνίζουν ότι θα προσληφθεί επαρκές προσωπικό ώστε να καλυφθούν οι απαιτούμενες εργαζόμενες ώρες ή/και

- β) Αν  $x \geq \alpha_i$  τότε  $y_i = 0$  γιατί τα  $y$  συρρέτουν σε μια ανεξάρτητη συνάρτηση

Εσβι η λύνει  $x \geq a_i$  και  $y_i > 0$  έχει ως προς  $z_i$  ενώ  
η λύνει  $x \geq a_i$  και  $y_i = 0$

η λύση  $x \geq \alpha_i$  και  $y_i = 0$  είναι νόμος  $z_2 < z_1$ . Αφού  
και οι δύο λύσεις είναι επιυτές, η πρώτη ( $x \geq \alpha_i, y_i > 0$ )  
δεν μπορεί να είναι βέλτιστη.

- $$\gamma) \max_{x, y_1, y_2, y_3} z = -52,5x - 25y_1 - 25y_2 - 25y_3$$

Διαφορρώνεται ο πρώτος πίνακας simplex:

$C_B$  Basis

	X	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>3</sub>	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	x <sub>B</sub>
0	$\bar{1}$	-1	-1	0	0	1	0	-390
0	$\bar{2}$	-1	0	-1	0	0	1	-420
0	$\bar{3}$	-1	0	0	-1	0	1	-340

-52,5 -25 -25 -25 0 0 0

-52,5 -25 -25 -25 0 0 0	Z=0
-------------------------	-----

Η δυν αερί δεν είναι επιρική στο ηρωκίον αλλά είναι επιρική στο δυν, από κ εφαρμόζεται ο δυν ως ατομικός simplex με την εξάρτη της  $\Sigma$  και την εισαγωγή της  $y_2$ :

$C_B$  Basis  

0	$\bar{1}$
-25	$y_2$
0	$\bar{3}$

$x$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
-1	(-1)	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	-1	0
-1	0	0	-1	0	0	1

$X_B$   

-390
420
-340

$-52,5$   $-25$   $-25$   $-25$   $0$   $0$   $0$   

$-27,5$	$-25$	$0$	$-25$	$0$	$-25$	$0$
---------	-------	-----	-------	-----	-------	-----

$Z = -10500$

## ΑΣΚΗΣΗ Α.7

α)  $e_t^+ = \max \{0, w_1 x_{1t} + w_2 x_{2t} - y_t\}$  = Γράμμα υπερεξήκησης  
 $e_t^- = \max \{0, y_t - w_1 x_{1t} + w_2 x_{2t}\}$  = " υποεξήκησης

Η συντημερηνική περρά το συνολικό γράμμα για τις τρεις περιόδους

Κάθε περιορισμός είναι της μορφής:

πρόβλεψη γράμμα = πωλήσεις

β)  $0, e_1^+, e_2^+, e_3^+$

γ)

$C_B$	Βάση	$w_1$	$w_2$	$e_1^+$	$e_1^-$	$e_2^+$	$e_2^-$	$e_3^+$	$e_3^-$	$Y_B$
-1	$e_1^+$	-0.25	0	1	-1	0	0	-0.75	0.75	25
-1	$e_2^+$	0.75	0	0	0	1	-1	-0.75	0.75	275
0	$w_2$	0.75	1	0	0	0	0	0.25	-0.25	325
		0	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	
		0.5	0	0	-2	0	-2	-2.5	0.5	-300

Η λύση δεν είναι βέλτιστη, γιατί  $\bar{z}_{w_1}, \bar{z}_{e_3^-} > 0$

Έστω ότι εισάγεται η  $w_1$ , τότε εξέρχεται η  $e_2^+$  και:

1. Διαγράφεται η γραμμή 2 με 0.75

2. Η νέα γραμμή 2 πολλαπλασιάζεται με 0.25 και προστίθεται στην 1η

3. Η νέα γραμμή 2 πολλαπλασιάζεται με -0.75 και προστίθεται στην 3η

δ)  $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.75 \\ 0 & 1 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix}$

ε)  $\min 1000u_1 + 1250u_2 + 1300u_3$   
 on.  $2u_1 + 3u_2 + 3u_3 \geq 0$   
 $3u_1 + 3u_2 + 4u_3 \geq 0$   
 $-1 \leq u_i \leq 1$   
 $u_i \in \mathbb{R}$

6ζ) Έστω ότι  $\varepsilon_t^+ \varepsilon_t^- > 0$ , δηλαδή  $\varepsilon_t^+ > 0$  και  $\varepsilon_t^- > 0$ .

Τότε από τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα έπρεπε οι μεταβλητές απόβλιου των αντίστοιχων δυϊκών περιορισμών να είναι μηδέν:

$$u_t = 1 \text{ και } u_t = -1$$

Προφανώς αυτό είναι αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.8

α)  $c_3 = 30$ , άρα η παραγωγή 10 τεμαχίων τύπου 3 αποφέρει κέρδος 300 €. Η παραγωγή αυτή απαιτεί 100 ανδρωπούρες από το 1<sup>ο</sup> στάδιο (γιατί  $a_{13} = 10$ ), 40 ανδρωπούρες από το 2<sup>ο</sup> (γιατί  $a_{23} = 4$ ) και 10 ανδρωπούρες από το 3<sup>ο</sup> (γιατί  $a_{33} = 1$ )

β) Ο πλήρης πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
14	2	0	1	11	19	1.5	-1	0	200
8	1	1	0	-12	-22	-2	2	0	400
0	$\bar{3}$	0	0	0.4	1.6	0.1	-0.4	1	20
$c$		8	14	30	50	0	0	0	
$\bar{c}$		0	0	-28	-40	-5	-2	0	6000

$$\text{όπου: } x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0.1 & -0.4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 800 \\ 1000 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Προφανώς αφού δεν υπάρχει δεσμός ΟΚΕ η λύση είναι βέλτιστη

γ) Θα πρέπει η  $x_3$  να εισαχθεί στη βάση. Δηλαδή:

$$\bar{c}_3 = c_3 - 58 \geq 0 \Rightarrow c_3 \geq 58$$

Στην περίπτωση αυτή εισέρχεται η  $x_3$  στη θέση του  $x_2$ . Οδηγό στοιχείο είναι το  $y_{23} = 11$  και γίνονται τα εξής:

- Η 1<sup>η</sup> γραμμή διαιρείται με 11 (1)
- Το αποτέλεσμα του (1) πολλαπλασιάζεται με 12 και προστίθεται στη 2<sup>η</sup> γραμμή
- Το αποτέλεσμα του (1) πολλαπλασιάζεται με -0.4 και προστίθεται στη 3<sup>η</sup> γραμμή

δ) Ναι γιατί η δυϊκή μεταβλητή  $u_1 = 5$

ε) Το κάτω φράγμα είναι

$$K\Phi_1 = 800 + \max \left\{ \frac{-200}{1.5}, \frac{-20}{0.1} \right\} = 666,6\bar{7} \text{ (μείωση κατά } \lambda = 133,333)$$

Αντίστοιχα το άνω φράγμα είναι:

$$A\Phi_1 = 800 + \min \left\{ \frac{-400}{-2} \right\} = 1000 \text{ (αύξηση κατά } \lambda = 200)$$

Στο ΚΦ οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$X'_B = X_B + \lambda y_I = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} + (-133,333) \begin{bmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 666,6\bar{7} \\ 6,6\bar{7} \end{bmatrix}$$

Άρα η νέα τιμή της ανεξαρτησίας συνάρτησης είναι

$$Z' = C_B^T X'_B = 5333,33$$

Αντίστοιχα στο ΑΦ οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$X'_B = X_B + \lambda y_I = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1,5 \\ -2 \\ 0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$

και η νέα τιμή της ανεξαρτησίας είναι

$$Z' = 7000$$

στ) Ο πλήρης πίνακας simplex είναι:

$C_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$X_B$
14	2	0	1	11	19	1,5	-1	0	0	200
8	$\frac{1}{3}$	1	0	-12	-22	-2	2	0	0	400
0	$\frac{3}{4}$	0	0	0,4	1,6	0,1	-0,4	1	0	20
0	$\frac{4}{1}$	0	0	4	6	0,5	1	0	1	-100
$C$ 8 14 30 50 0 0 0 0 0										
$\bar{C}$ 0 0 -28 -40 -5 -2 0 0										
										6000

Η λύση αυτή δεν είναι εφικτή στο πρωτεύον αλλά είναι εφικτή στο δυϊκό. Εφαρμόζεται λοιπόν ο δυϊκός αλγόριθμος. Εξερχόμενη μεταβλητή είναι η  $\bar{4}$ . Όπως  $y_{\bar{4}j} \geq 0$  για όλες τις μη βασικές μεταβλητές  $j$ . Άρα το δυϊκό δεν είναι φραγμένο και επομένως το πρωτεύον είναι αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.10

α) Αφού δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές, το πρόβλημα είναι εφικτό.

Ο πίνακας της φάσης II είναι:

$C_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$X_B$
-30	$\bar{2}$	1	1	1	0	0	1
0	$\bar{1}$	3	0	4	1	0	2
0	$\bar{2}$	1	0	1	0	1	1

$C$  -28 -30 -20    0    0

$\bar{C}$	2	0	10	0	0	-30
-----------	---	---	----	---	---	-----

↑

β) Είλεγοντας την 3 και ελεγοντας την  $\bar{1}$  ο νέος πίνακας είναι:

$C_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$X_B$
-30	2	0.25	1	0	-0.25	0	0.5
-20	3	0.75	0	1	0.25	0	0.5
0	$\bar{2}$	0.25	0	0	-0.25	1	0.5

$C$  -28 -30 -20    0    0

$\bar{C}$	-5.5	0	0	-2.5	0	-25
-----------	------	---	---	------	---	-----

$$\gamma) K\Phi = \max \left\{ 3 - \frac{0.5}{0.25} \right\} = 1 \quad A\Phi = \min \left\{ 3 - \frac{0.5}{-0.25}, 3 - \frac{0.5}{-0.25} \right\} = 5$$

δ) Το ΟΚΕ της  $\bar{1}$  είναι -2.5. Άρα  $u_1 = 2.5$  (δύο μεταβλητές 1ου περιωριστού). Επομένως αύξηση του β' μέλους κατά  $\epsilon > 0$  σημαίνει αύξηση της αντικειμενικής κατά 2.5 $\epsilon$ .  
Για τον 2ο περιωριστό δεν θα υπάρξει καμία αλλαγή, γιατί  $\bar{c}_2 = 0$

ε) Θα πρέπει να βρούμε τα νέα  $X_B$ :

$$X'_B = X_B + \lambda y_T = \begin{bmatrix} 1.125 \\ -0.125 \\ 1.125 \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:





β) Αφού  $\bar{c}_1 = -0.5$ , τότε  $u_1 = 0.5$ . Άρα θα ηλθάρωτε έως 0.5 νομίση. ρονάδες / τόνο.

Το ΑΦ του  $b_1$  είναι:

$$ΑΦ = 15 + \min \left\{ \frac{-1.5}{-0.5} \right\} = 18$$

Άρα θα μπορούμε να αγοράσει 3 τόνους

Η αύξηση του κέρδους είναι  $(3 \text{ τόνοι}) \times u_1 = 1.5$

Εναλλακτικά:  $x'_B = x_B + \lambda y_1 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 4.5 \\ 1.5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Το νέο κέρδος είναι:

$$c_B^T x'_B = 18$$

Δηλαδή αύξηση κατά 1.5

γ)

$b_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$u_B$
-15	1	1	0	-0.5	0.5	-0.5	0.5
-6	2	0	1	2.5	-1.5	0.5	1.5

$$\begin{array}{l} b \\ \bar{b} \end{array} \begin{array}{cccccc} -15 & -6 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & -1.5 & -4.5 \end{array} \begin{array}{c} \\ -16.5 \end{array}$$

δ)  $y_3 = B^{-1} \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

Άρα ο νέος πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{3}$	0	0	-2	0.5	-2.5	1	2.5
3	2	0	1	0.5	0.5	-0.5	0	4.5
2	1	1	0	1.5	-0.5	1.5	0	1.5

$$\begin{array}{l} c \\ \bar{c} \end{array} \begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 4.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.5 & -1.5 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \\ 16.5 \end{array}$$

Αφού  $\bar{c} \leq 0$ , η λύση παραμένει βέλτιστη

## ΑΣΚΗΣΗ Α.12

α)  $\max 3x_1 + 3x_2 + 5x_3$   
 un:  $1.2x_1 + 1.7x_2 + 1.2x_3 \leq 1000$   
 $0.8x_1 + 2.3x_3 \leq 1200$   
 $2x_1 + 3x_2 + 4.5x_3 \leq 2000$   
 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

β) Εισάγεται η 1 στο δέγμα της  $\bar{I}$ :

$C_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{I}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$X_B$
3	1	1	1.35	0	1.5	0	-0.4	700
0	$\bar{2}$	0	-1.23	0	0.33	1	-0.6	333.33
5	3	0	0.07	1	-0.67	0	0.4	133.33
		3	3	5	0	0	0	
		0	-1.38	0	-1.17	0	-0.8	2766.67

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0 & -0.4 \\ 0.33 & 1 & -0.6 \\ -0.67 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

γ) Ναι γιατί  $u_3 = 0.8 > 0.5$

$$A\Phi(b_3) = 2000 + \min \left\{ -\frac{700}{-0.4}, -\frac{333.33}{-0.6} \right\} = 2555.56$$

Άρα μπορούν να αγοράσουν έως 555,56 επιπλέον μονάδες  
 Αν αγοράσουν 500 επιπλέον μονάδες το κέρδος θα  
 αυξηθεί κατά  $500 \times 0.8 = 400$ , δηλαδή θα γίνει 3166.67

δ) Εισάγεται η μεταβλητή  $x_4$ . Οι συντελεστές της στους  
 περιορισμούς είναι:

$$a_4 = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

Οπότε:

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 2.18 \\ 0.32 \\ -0.68 \end{bmatrix}$$

Για να συμφέρει πρέπει

$$\bar{c}_4 \geq 0 \Rightarrow c_4 - [3 \ 0 \ 5] \begin{bmatrix} 2.18 \\ 0.32 \\ -0.68 \end{bmatrix} \geq 0 \Rightarrow c_4 \geq 3.14$$

## ΑΣΚΗΣΗ Α.13

### 1) Μεταβλητές απόφασης

$x_1$ : ποσότητα υλικού Α που χρησιμοποιείται στην παραγωγή

$x_2$ : ποσότητα υλικού Β που χρησιμοποιείται στην παραγωγή

$x_3$ : ποσότητα υλικού Γ που χρησιμοποιείται στην παραγωγή

Το γραμμικό πρόγραμμα είναι

$$\min \quad 2x_1 + 1.5x_2 + x_3$$

$$\text{Υπ.} \quad x_1 \geq 200$$

$$x_2 \geq 400$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

### 2) Ο αρχικός πίνακας είναι

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$x_B$
-M	$\bar{\bar{1}}$	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-M	$\bar{\bar{2}}$	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	1	1	0	0	0	0	1	2000
$c$		-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
$\bar{c}$		-2	-1.5	-1	-M	-M	0	0	0	-2600M
		+2M	+2M	+M						

Εισάγεται η 2 στη θέση της  $\bar{\bar{2}}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$x_B$
-M	$\bar{\bar{1}}$	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	1	0	1	0	1	0	-1	1	1600
$c$		-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
$\bar{c}$		-2	0	-1	-M	-1.5	0	1.5	0	-600
		+2M		+M		+M				-2000M

Εισάγεται η 1 στη θέση της  $\bar{\bar{1}}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$x_B$
-2	1	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-M	$\bar{\bar{3}}$	0	0	1	1	1	-1	-1	1	1400
$c$		-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
$\bar{c}$		0	0	-1	-2	-1.5	2	1.5	0	-1000
				+M	+M	+M				-1400M

Εισάγεται η 3 στη θέση της  $\bar{\bar{3}}$ :

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{1}}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$\mathbf{x}_B$
-2	1	1	0	0	-1	0	1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	1	0	400
-1	3	0	0	1	1	1	-1	-1	1	1400
$\mathbf{c}$		-2	-1.5	-1	0	0	-M	-M	-M	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	-1	-0.5	1	0.5	1	-2400
							-M	-M	-M	

3) Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται κάτω από τις τρεις τεχνητές μεταβλητές:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι:  $(u_1, u_2, u_3) = (-1, -0.5, -1)$

4) Τα φράγματα είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\Phi(c_1) &= c_1 + \max_{j \notin B, y_{1j} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -2 - \infty = -\infty \\ \mathbf{A}\Phi(c_1) &= c_1 + \min_{j \notin B, y_{1j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -2 + \frac{-1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

Άρα το κόστος για το υλικό A μπορεί να κυμανθεί στο διάστημα  $[1, \infty)$

5) Ο νέος περιορισμός είναι:  $x_3 \leq 1200$ . Η λύση παραβιάζει τον περιορισμό, οπότε η μεταβλητή απόκλισης  $x_4 = -200$  θα είναι βασική στη νέα βασική (μη εφικτή λύση). Το κεντρικό μέρος του νέου πίνακα simplex θα είναι:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B \mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{a}_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$  και  $\mathbf{a}_4^B = [0 \ 0 \ 1]$ . Άρα ο νέος πίνακας simplex είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\mathbf{x}_B$
-2	1	1	0	0	-1	0	0	200
-1.5	2	0	1	0	0	-1	0	400
-1	3	0	0	1	1	1	0	1400
0	$\bar{4}$	0	0	0	-1	-1	1	-200
$\mathbf{c}$		-2	-1.5	-1	0	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	0	0	-1	-0.5	0	-2200

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την  $\bar{4}$  και εισερχόμενη την  $\bar{2}$



## ΑΣΚΗΣΗ Α.14

1) 1ος πίνακας simplex:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	1	2	1	0	0	6
0	$\bar{2}$	2	1	0	1	0	8
0	$\bar{3}$	-1	1	0	0	1	1
$c$		3	2	0	0	0	
$\bar{c}$		3	2	0	0	0	0

Εισέρχεται η 1 στη θέση της  $\bar{2}$  και διαμορφώνεται ο 2ος πίνακας simplex:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	0	1.5	1	-0.5	0	2
3	1	1	0.5	0	0.5	0	4
0	$\bar{3}$	0	1.5	0	0.5	1	5
$c$		3	2	0	0	0	
$\bar{c}$		0	0.5	0	-1.5	0	12

Εισέρχεται η 2 στη θέση της  $\bar{1}$  και διαμορφώνεται ο 3ος πίνακας simplex:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
2	2	0	1	0.67	-0.33	0	1.33
3	1	1	0	-0.33	0.67	0	3.33
0	$\bar{3}$	0	0	-1	1	1	3
$c$		3	2	0	0	0	
$\bar{c}$		0	0	-0.33	-1.33	0	12.67

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση αφού όλα τα ΟΚΕ είναι αρνητικά

2) Ο πίνακας της βάσης και ο αντίστροφός του είναι:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.67 & -0.33 & 0 \\ -0.33 & 0.67 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

$b_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$u_B$
-6	1	1	0	1	0.33	-0.67	0.33
-8	2	0	1	-1	-0.67	0.33	1.33
$b$		-6	-8	-1	0	0	
$\bar{b}$		0	0	-3	-3.33	-1.33	-12.67

4) Τα φράγματα για το δεξιό μέλος του 2<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$A\Phi(b_2) = b_2 + \min_{y_{i\bar{2}} < 0} \left\{ -\frac{x_{B_i}}{y_{i\bar{2}}} \right\} = 8 + \left\{ -\frac{1.33}{-0.33} \right\} = 12$$

$$K\Phi(b_2) = b_2 + \max_{y_{i\bar{2}} \geq 0} \left\{ -\frac{x_{B_i}}{y_{i\bar{2}}} \right\} = 8 + \max \left\{ -\frac{3.33}{0.67}, -\frac{3}{1} \right\} = 5$$

5) Η δυϊκή μεταβλητή που αντιστοιχεί στο 2<sup>ο</sup> περιορισμό είναι  $u_2 = 1.33$ . Άρα η αύξηση του δεξιού μέλους του περιορισμού κατά 2 μονάδες θα οδηγήσει σε αύξηση της αντικειμενικής συνάρτησης κατά  $2u_2 = 2.67$ .

## ΑΣΚΗΣΗ Α.15

1) Ο πλήρης πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	2.5	0	2	1	0.25	0	10
3	2	-0.5	1	0	0	0.25	0	3
0	$\bar{3}$	-2.5	0	3	0	-0.75	1	5
$c$		-1	3	0.4	0	0	0	
$\bar{c}$		0.5	0	0.4	0	-0.75	0	9

Εισάγεται η 1στη θέση της  $\bar{1}$  και ο νέος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
-1	1	1	0	0.8	0.4	0.1	0	4
3	2	0	1	0.4	0.2	0.3	0	5
0	$\bar{3}$	0	0	5	1	-0.5	1	15
$c$		-1	3	0.4	0	0	0	
$\bar{c}$		0	0	0	-0.2	-0.8	0	11

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

- 2) Υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις, γιατί  $\bar{c}_3 = 0$  και η  $x_3$  μπορεί να εισαχθεί στη βάση με μη μηδενική τιμή. Έτσι, μια εναλλακτική βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί εισάγοντας την  $x_3$  στη θέση της  $x_{\bar{3}}$ .
- 3) Η λύση του δυϊκού διαμορφώνεται από τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών. Έτσι η λύση του δυϊκού είναι η  $(u_1, u_2, u_3) = (0.2, 0.8, 0)$ .

Τα  $x_B$  καθορίζουν τα ΟΚΕ του δυϊκού. Αφού λοιπόν  $x_B > 0$ , τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών στη λύση του δυϊκού είναι όλα αρνητικά. Επομένως η λύση του δυϊκού είναι μοναδική.

- 4) Έως €0.8, δηλαδή όσο η τιμή της δυϊκής μεταβλητής του περιορισμού αυτού στη βέλτιστη λύση. Η ποσότητα που θα μπορούσε να αγοραστεί στην τιμή αυτή καθορίζεται από το άνω φράγμα του β' μέλους του 2<sup>ου</sup> περιορισμού:

$$A\Phi(b_2) = 12 - \frac{15}{-0.5} = 42$$

Άρα θα μπορούσαν να αγοραστούν ακόμα 30 μονάδες



5) Η στήλη του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή είναι:

$$\mathbf{y}_4 = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0 \\ 1 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4a_{14} + 0.1a_{24} \\ 0.2a_{14} + 0.3a_{24} \\ a_{14} - a_{24} + a_{34} \end{bmatrix}$$

Οπότε το ΟΚΕ της μεταβλητής αυτής είναι:

$$\bar{c}_4 = -c_4 - \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.4a_{14} + 0.1a_{24} \\ 0.2a_{14} + 0.3a_{24} \\ a_{14} - a_{24} + a_{34} \end{bmatrix} = -c_4 - 0.2a_{14} - 0.8a_{24}$$

Για να μην αλλάξει η βέλτιστη λύση θα πρέπει:

$$\bar{c}_4 \leq 0 \Leftrightarrow c_4 + 0.2a_{14} + 0.8a_{24} \geq 0$$

## ΑΣΚΗΣΗ Α.16

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 7u_2 + 10u_3 \\ \text{υ.π.} \quad & 12u_1 - 3u_2 \geq 2 \\ & u_1 + u_2 + u_3 \geq 1 \\ & u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2) Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1	1	0	0.2	-1/15	-0.2	1/3
-7	2	0	1	0.8	1/15	-0.8	2/3
$\mathbf{b}$		-6	-7	-10	0	0	
$\bar{\mathbf{b}}$		0	0	-3.2	1/15	-6.8	20/3

Εισάγεται η  $\bar{1}$  στη θέση της 2 και η νέα λύση είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\mathbf{u}_B$
-6	1	1	1	1	0	-1	1
0	$\bar{1}$	0	15	12	1	-12	10
$\mathbf{b}$		-6	-7	-10	0	0	
$\bar{\mathbf{b}}$		0	-1	-4	0	-6	-6

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

3) Ο πίνακας του πρωτεύοντος είναι

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
1	2	12	1	1	0	0	6
0	$\bar{2}$	-15	0	-1	1	0	1
0	$\bar{3}$	-12	0	-1	0	1	4
$\mathbf{c}$		2	1	0	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		-10	0	-1	0	0	6

4) Το διάστημα τιμών για το  $c_2$  προσδιορίζεται από τα εξής φράγματα

$$K\Phi(c_2) = 1 + \max \left\{ \frac{-10}{12}, \frac{-1}{1} \right\} = 0.167$$

$$A\Phi(c_2) = \infty$$

5) Η εισαγωγή του περιορισμού αυτού αντιστοιχεί στην εισαγωγή μίας επιπλέον μεταβλητής στο δυϊκό. Γράφοντας τον περιορισμό ως

$$-x_1 - 7x_2 \leq -45$$

η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή  $u_4$  είναι  $u_4 \geq 0$  και οι συντελεστές της στους περιορισμούς δίνονται στο ακόλουθο διάνυσμα:

$$a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Επομένως, εισάγεται μία επιπλέον στήλη στον πίνακα simplex ως εξής:

$$y_4 = B^{-1}a_4$$

όπου

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

$b_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$u_B$
-6	1	1	1	1	-7	0	-1	1
0	$\bar{1}$	0	15	12	-83	1	-12	10
$b$		-6	-7	-10	45	0	0	
$\bar{b}$		0	-1	-4	3	0	-6	-6

Το πρόβλημα είναι μη φραγμένο αφού εισέρχεται η 4, αλλά δεν υπάρχει εξερχόμενη μεταβλητή.

Επομένως το ΓΠ μετά την εισαγωγή του περιορισμού είναι αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.17

1) 1ος πίνακας simplex:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
750	3	0	0.5	1	1.5	-0.5	52.5
1250	1	1	0.5	0	-0.5	0.5	7.5
$c$		1250	1050	750	0	0	
$\bar{c}$		0	50	0	-500	-250	48750

Εισέρχεται η 2 στη θέση της 1 και διαμορφώνεται ο 2ος πίνακας simplex:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
750	3	-1	0	1	2	-1	45
1250	2	2	1	0	-1	1	15
$c$		1250	1050	750	0	0	
$\bar{c}$		-100	0	0	-450	-300	49500

2) Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

$B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$u_B$
0	$\bar{1}$	0	0	1	-2	1	100
-60	1	1	0	0	1	-2	450
-75	2	0	1	0	-1	1	300
$c$		1250	1050	750	0	0	
$\bar{c}$		0	0	0	-15	-45	-49500

3) Τον 1<sup>ο</sup> περιορισμό γιατί  $u_1 > u_2$ . Το ΑΦ του 1<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$A\Phi = 60 + \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \end{pmatrix} = 75$$

4) Με την αλλαγή αυτή ο πίνακας της βέλτιστης λύσης του (1) γίνεται:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
750	3	-1	0	1	2	-1	125
1250	2	2	1	0	-1	1	-25
$c$		1250	1050	750	0	0	
$\bar{c}$		-100	0	0	-450	-300	67500

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος, με εξερχόμενη την 2 και εισερχόμενη την  $\bar{1}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
750	3	3	2	1	0	1	75
0	$\bar{1}$	-2	-1	0	1	-1	25
$c$		1250	1050	750	0	0	
$\bar{c}$		-1000	-450	0	0	-750	82500

## ΑΣΚΗΣΗ Α.18

1) Αφού η  $\bar{1}$  είναι βασική, αυτό σημαίνει ότι η στήλη του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη μεταβλητή αυτή θα είναι  $[1 \ 0]^T$ . Επομένως ο αντίστροφος πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τις στήλες του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχούν στις μεταβλητές  $\bar{1}$  και  $\bar{2}$ :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τους αλγεβρικούς υπολογισμούς  $Y = B^{-1}A$  και  $x_B = B^{-1}b$  διαμορφώνεται το κεντρικό τμήμα  $Y$  του πίνακα simplex και υπολογίζονται οι τιμές των βασικών μεταβλητών (διάνυσμα  $x_B$ ). Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	1	1	-1	0	1	-1	1
2	4	3	1	2	1	0	1	4
$c$		4	3	1	2	0	0	
$\bar{c}$		-2	1	-3	0	0	-2	8

- 2) Εισάγεται η 2 στη θέση της  $\bar{1}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
3	2	1	1	-1	0	1	-1	1
2	4	2	0	3	1	-1	2	3
$c$		4	3	1	2	0	0	
$\bar{c}$		-3	0	-2	0	-1	-1	9

Αυτή η λύση είναι βέλτιστη

- 3) Η βέλτιστη λύση είναι μοναδική γιατί τα ΟΚΕ των μη βασικών μεταβλητών είναι όλα αρνητικά. Εάν όμως άλλαζε η αντικειμενική συνάρτηση, τότε  $\bar{c}_3 = 0$  και πλέον το ΓΠ θα είχε άπειρες βέλτιστες λύσεις (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η λύση δεν είναι εκφυλισμένη).
- 4) Το άνω φράγμα για το  $b_1$  είναι:

$$A\Phi(b_1) = 5 + \min \left\{ \frac{-3}{-1} \right\} = 8$$

Δηλαδή θα μπορούσε να υπάρξει αύξηση κατά 3 μονάδες. Η αύξηση αυτή αύξανε την αντικειμενική συνάρτηση κατά 3 μονάδες αφού  $u_1 = -\bar{c}_1 = 1$ .

- 5) Στην περίπτωση αυτή, ο νέος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
3	2	1	1	-1	0	1	-1	6
2	4	2	0	3	1	-1	2	-2
$c$		4	3	1	2	0	0	
$\bar{c}$		-3	0	-2	0	-1	-1	14

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την 4 και εισερχόμενη την  $\bar{1}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
3	2	3	1	2	1	0	1	4
0	$\bar{1}$	-2	0	-3	-1	1	-2	2
$c$		4	3	1	2	0	0	
$\bar{c}$		-5	0	-5	-1	0	-3	12

## ΑΣΚΗΣΗ Α.19

- 1) Η λύση του συγκεκριμένου ΓΠ θα ξεκινούσε έχοντας ως αρχικές βασικές μεταβλητές τις  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$  και  $\bar{3}$ . Οπότε ο αντίστροφος πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τις στήλες του κεντρικού μέρους του πίνακα simplex που αντιστοιχούν στις μεταβλητές αυτές:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & -1 & 11/3 \end{bmatrix}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  υπολογίζονται οι τιμές των βασικών μεταβλητών. Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{\bar{3}}$	$x_B$
0	2	1	1	0	1/3	0	0	1/3	5
0	3	1	0	1	0	0	0	1	6
0	$\bar{2}$	5	0	0	2/3	1	-1	11/3	24
$c$		0	0	0	0	0	-1	-1	
$\bar{c}$		0	0	0	0	0	-1	-1	0

Το ΓΠ είναι εφικτό γιατί σε αυτή τη βέλτιστη λύση της φάσης Ι δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση.

- 2) Ο 1<sup>ος</sup> πίνακας της φάσης ΙΙ προκύπτει από τον παραπάνω βέλτιστο πίνακα της φάσης Ι, διαγράφοντας τις στήλες που αντιστοιχούν στις τεχνητές μεταβλητές και προσαρμόζοντας τα ΟΚΕ χρησιμοποιώντας την αντικειμενική συνάρτηση του δοθέντος ΓΠ:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
1	2	1	1	0	1/3	0	5
1	3	1	0	1	0	0	6
0	$\bar{2}$	5	0	0	2/3	1	24
$c$		3	1	1	0	0	
$\bar{c}$		1	0	0	-1/3	0	11

Εισάγεται η 1 στη θέση της  $\bar{2}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
1	2	0	1	0	1/5	-1/5	0.2
1	3	0	0	1	-2/15	-1/5	1.2
3	1	1	0	0	2/15	1/5	4.8
$c$		3	1	1	0	0	
$\bar{c}$		1	0	0	-35/75	0	15.8

- 3) Το ΟΚΕ της  $\bar{1}$  είναι  $-35/75$ , άρα  $u_1 = 35/75$ . Δηλαδή μια οριακή αύξηση του β' μέλους του 1<sup>ου</sup> περιορισμού θα αυξήσει την αντικειμενική συνάρτηση κατά  $35/75$ .
- 4) Τα φράγματα για το  $b_1$  είναι:

$$K\Phi(b_1) = 9 + \max \left\{ \frac{-0.2}{1/5}, \frac{-4.8}{2/15} \right\} = 8 \quad A\Phi(b_1) = 9 + \min \left\{ \frac{-1.2}{-2/15} \right\} = 18$$

## ΑΣΚΗΣΗ Α.20

- 1) Ο ολοκληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	-1	0	1	-1	0	1
1-2λ	2	-1	1	0	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0	0	1	1	5
		-3+λ	1-2λ	0	0	0	
		-2-λ	0	0	-1+2λ	0	1-2λ

Τα  $x_B$  υπολογίστηκαν από τη σχέση  $x_B = B^{-1}b$ , όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex κάτω από τις στήλες  $\bar{1}$ ,  $\bar{2}$ ,  $\bar{3}$ .

- 2) Για να είναι η λύση βέλτιστη θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} -2 - \lambda \leq 0 \\ -1 + 2\lambda \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \leq \lambda \leq 1/2$$

Για να είναι το πρόβλημα μη φραγμένο θα πρέπει  $-2 - \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \leq -2$ . Σε αυτή την περίπτωση η εισαγωγή της  $x_1$  καθιστά το ΓΠ μη φραγμένο.

- 3) Εάν  $\lambda = 1$  τότε εισάγεται στη βάση η  $\bar{2}$  (γιατί έχει θετικό ΟΚΕ:  $-1 + 2\lambda = 1 > 0$ ) και εξέρχεται η 2. Το οδηγό στοιχείο είναι το  $(2, \bar{2})$  που είναι 1. Οπότε η 2<sup>η</sup> γραμμή πολλαπλασιάζεται με 1 και προστίθεται στην 2<sup>η</sup>. Επίσης η 2<sup>η</sup> γραμμή πολλαπλασιάζεται με -1 και προστίθεται στην 3<sup>η</sup>.

- 4) Τα φράγματα είναι

$$K\Phi(b_1) = 1 + \max \left\{ \frac{-1}{1}, \frac{-5}{1} \right\} = 0 \quad A\Phi(b_1) = 1 + \min \left\{ \frac{-1}{-1} \right\} = 2$$

- 5) Η μεταβολή αυτή είναι εντός των παραπάνω ορίων. Η δυϊκή μεταβλητή του 2<sup>ου</sup> περιορισμού είναι ίση με  $u_2 = -\bar{c}_2 = 1 - 2\lambda$ . Επομένως εάν το δεξιό μέρος του 2<sup>ου</sup> περιορισμού γίνει 0.7 (μείωση 0.3) τότε η νέα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι:

$$f' = f - 0.3u_1 = (1 - 2\lambda) - 0.3(1 - 2\lambda) = 0.7 - 1.4\lambda$$

## ΑΣΚΗΣΗ A.21

- 1) Η αντικειμενική συνάρτηση της φάσης I είναι:  $\max -x_{\bar{1}}$ . Άρα ο πλήρης πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	1	1	0.5	-0.5	0.5	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	-0.5	1.5	-1.5	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0.5	0.5	-0.5	0	1	0
c		0	0	0	-1	0	0	
c-		0	0	0	-1	0	0	0

Η λύση είναι βέλτιστη για το ΓΠ της φάσης I αφού δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ. Επειδή στη λύση αυτή δεν υπάρχουν τεχνητές μεταβλητές στη βάση, το ΓΠ είναι εφικτό

- 2) Ο 1<sup>ος</sup> πίνακας της φάσης 2 προκύπτει διαγράφοντας την  $\bar{1}$  από τον πίνακα της φάσης I και αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση με αυτή του δοθέντος ΓΠ:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
1	1	1	0.5	-0.5	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	-0.5	1.5	1	0	1
0	$\bar{3}$	0	0.5	0.5	0	1	0
c		1	1	0	0	0	
c-		0	0.5	0.5	0	0	1

Εισάγεται η 2 στη θέση της  $\bar{3}$  (γιατί την 3<sup>η</sup> γραμμή αντιστοιχεί το μικρότερο από τα  $1/0.5, 0/0.5$ ):

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
1	1	1	0	-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$	0	0	2	1	1	1
1	2	0	1	1	0	2	0
c		1	1	0	0	0	
c-		0	0	0	0	-1	1

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

- 3) Το  $A\Phi$  και  $K\Phi$  του  $c_2$  είναι:

$$A\Phi(c_2) = c_2 + \min_{j \in B, y_{kj} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{kj}} \right\} = +\infty \quad K\Phi(c_2) = c_2 + \max_{j \in B, y_{kj} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{kj}} \right\} = 1 + \left\{ \frac{0}{1}, \frac{-1}{2} \right\} = 1$$

- 4) Η επιπλέον στήλη του κεντρικού πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη νέα μεταβλητή θα είναι:

$$y_3 = B^{-1}a_3$$

όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex που αντιστοιχεί στις μεταβλητές  $\bar{1}$  (με αντίθετο πρόσημο),  $\bar{2}$  και  $\bar{3}$ . Άρα ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
1	1	1	0	0	-1	0	-1	1
0	$\bar{2}$	0	0	5	2	1	1	1
1	2	0	1	1	1	0	2	0
c		1	1	0.3	0	0	0	
c-		0	0	-0.7	0	0	-1	1

Επομένως η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.22

- 1) Αφού οι μεταβλητές  $\bar{2}$ ,  $\bar{1}$  και 1 είναι βασικές, στο κεντρικό μέρος του πίνακα θα διαμορφώσουν τον μοναδιαίο πίνακα. Η στήλη της μεταβλητής  $x_3$  μπορεί να βρεθεί πολλαπλασιάζοντας τον αντίστροφο πίνακα της βάσης με τους συντελεστές της  $x_3$  στους περιορισμούς, όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης. Ο πλήρης πίνακας είναι ο ακόλουθος:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
7	2	0	1	-0,5	0	1,5	-2	3,5
0	$\bar{1}$	0	0	2	1	1	2	18
13	1	1	0	0,5	0	-0,5	2	1,5
		13	7	5	0	0	0	
		0	0	2	0	-4	-12	44

Εισέρχεται η 3 στη θέση της 1:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
7	2	1	1	0	0	1	0	5
0	$\bar{1}$	-4	0	0	1	3	-6	12
5	3	2	0	1	0	-1	4	3
		13	7	5	0	0	0	
		-4	0	0	0	-2	-20	50

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη αφού δεν υπάρχουν θετικά ΟΚΕ.

- 2) Η μέγιστη μείωση του δεξιού μέλους του 2<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max \left\{ -\frac{5}{1}, -\frac{12}{3} \right\} = -4$$

Το ΟΚΕ της μεταβλητής  $\bar{2}$  είναι  $-2$ , άρα η δυϊκή μεταβλητή του 2<sup>ου</sup> περιορισμού είναι  $u_2 = 2$ . Επομένως, με την παραπάνω μεταβολή η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα μεταβληθεί κατά  $\lambda u_2 = -8$  (μείωση 8 μονάδων από 50 σε 42).

- 3) Ο περιορισμός αυτός σε πρότυπη μορφή γράφεται ως  $x_2 + x_4 = 3$ . Η βέλτιστη λύση του 1<sup>ου</sup> ερωτήματος παραβιάζει το νέο περιορισμό, γιατί στη λύση αυτή είναι  $x_2 = 5$ . Άρα η μεταβλητή απόκλισης  $x_4$  θα είναι βασική και ίση με  $-2$ . Το κεντρικό μέρος του νέου πίνακα simplex θα έχει στην εξής δομή:

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_4^B \mathbf{Y} & 1 \end{bmatrix}$$

όπου  $\mathbf{Y}$  είναι το κεντρικό μέρος του πίνακα simplex στη βέλτιστη λύση του 1<sup>ου</sup> ερωτήματος,  $\mathbf{a}_4$  είναι οι συντελεστές των μεταβλητών απόφασης στον επιπλέον περιορισμό και  $\mathbf{a}_4^B$  είναι οι συντελεστές των βασικών μεταβλητών του βέλτιστου πίνακα simplex του 1<sup>ου</sup> ερωτήματος στο νέο περιορισμό:

$$\mathbf{a}_4 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ και } \mathbf{a}_4^B = [1 \ 0 \ 0]$$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$x_B$
7	2	1	1	0	0	1	0	0	5
0	$\bar{1}$	-4	0	0	1	3	-6	0	12
5	3	2	0	1	0	-1	4	0	3
0	$\bar{4}$	-1	0	0	0	-1	0	1	-2
		13	7	5	0	0	0	0	
		-4	0	0	0	-2	-20	0	50

Εφαρμόζεται ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την  $\bar{4}$ , εισερχόμενη την  $\bar{2}$  και οδηγό στοιχείο το  $(4, \bar{2}) = -1$ .

## ΑΣΚΗΣΗ Α.23

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	3	0	1	0	0	4	88
0	$\bar{2}$	2	0	0	1	0	3	61
0	$\bar{3}$	1	0	0	0	1	2	24
25	2	0	1	0	0	0	-1	3
		15	25	0	0	0	0	
		15	0	0	0	0	25	75

2. Εάν εισαχθεί στη βάση η  $x_1$ , τότε  $\theta_1 = \min\{88/3, 61/2, 24/1\} = 24$ , οπότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά  $\theta_1 \bar{c}_1 = 24 \times 15 = 360$ . Εάν εισαχθεί στη βάση η  $x_4$ , τότε  $\theta_4 = \min\{88/4, 61/3, 24/2\} = 12$ , οπότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά  $\theta_4 \bar{c}_4 = 12 \times 25 = 300$ . Άρα στη βάση εισέρχεται η  $x_1$  στη θέση της  $x_3$  και ο νέος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	0	0	1	0	-3	-2	16
0	$\bar{2}$	0	0	0	1	-2	-1	13
15	1	1	0	0	0	1	2	24
25	2	0	1	0	0	0	-1	3
		15	25	0	0	0	0	
		0	0	0	0	-15	-5	435

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Σύμφωνα όμως με την παραπάνω βέλτιστη λύση είναι  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0$ , δηλαδή οι δυϊκές μεταβλητές των περιορισμών που αντιστοιχούν στο προσωπικό είναι 0. Άρα η πρόσληψη επιπλέον προσωπικού δεν αποφέρει κάποιο όφελος. Αντίθετα, η αύξηση της διαθέσιμης ποσότητας πρώτης ύλης ( $3^{ος}$  περιορισμός) θα αποφέρει όφελος  $u_3 = 15 \text{ €/μονάδα}$ . Επομένως προτείνεται η προμήθεια επιπλέον ποσότητας πρώτης ύλης σε τιμή το πολύ 15€/μονάδα. Η ποσότητα που μπορεί να αγοραστεί στην τιμή αυτή προσδιορίζεται από το άνω φράγμα για το δεξιό μέλος του  $3^{ου}$  περιορισμού:

$$A\Phi = 30 + \min\{-16/-3, -13/-2\} = 35.33$$

Δηλαδή η επιχείρηση μπορεί να προμηθευτεί το πολύ 5.33 μονάδες της πρώτης ύλης αυξάνοντας έτσι τα έσοδα κατά  $5.33u_3 = 80 \text{ €}$

4. Με την αλλαγή αυτή οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών θα είναι:



$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda(-\mathbf{y}_4) = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} + 13 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 26 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Άρα θα πρέπει να εφαρμοστεί ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη την  $x_1$ . Στη γραμμή όμως της  $x_1$  στον κεντρικό πίνακα simplex δεν υπάρχει αρνητική τιμή, άρα η μεταβολή αυτή καθιστά το ΓΠ αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.24

1. Στον κεντρικό πίνακα simplex οι στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές 2,  $\bar{1}$  και 3 διαμορφώνουν το μοναδιαίο πίνακα. Η στήλη για τη μεταβλητή απόφασης 1 στο κεντρικό μέρος του πίνακα μπορεί να υπολογιστεί ως  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1$ , όπου  $\mathbf{B}^{-1}$  είναι ο αντίστροφος πίνακας της βάσης και  $\mathbf{a}_1$  είναι το διάνυσμα-στήλη με τους συντελεστές της μεταβλητής απόφασης 1 στους περιορισμούς.

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 1.2 \\ 1 & 1.2 & -5.6 \\ 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 1.2 \\ 1 & 1.2 & -5.6 \\ 0 & 1.2 & -1.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
3	2	0.8	1	0	0	-0.4	1.2	1.6
0	$\bar{1}$	1.6	0	0	1	1.2	-5.6	27.2
2	3	1.6	0	1	0	1.2	-1.6	11.2
$\mathbf{c}$		6	3	2	0	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		0.4	0	0	0	-1.2	-0.4	27.2

2. Εισάγεται στη βάση η 1 στη θέση της 2. Ο νέος πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
6	1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	2
0	$\bar{1}$	0	-2	0	1	2	-8	24
2	3	0	-2	1	0	2	-4	8
$\mathbf{c}$		6	3	2	0	0	0	
$\bar{\mathbf{c}}$		0	-0.5	0	0	-1	-1	28

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Το ΚΦ του  $b_2$  είναι:

$$\text{ΚΦ}(b_2) = b_2 + \max_{y_{ik} > 0} \left\{ -\frac{x_{B_i}}{y_{ik}} \right\} = 20 + \max \left\{ -\frac{24}{2}, -\frac{8}{2} \right\} = 16$$

Η μείωση των 3 μονάδων είναι εντός του παραπάνω ορίου. Επομένως η μεταβολή στην αντικειμενική συνάρτηση θα είναι  $3u_2$ , όπου  $u_2 = -\bar{c}_2 = 1$  είναι η δυϊκή μεταβλητή του 2<sup>ου</sup> περιορισμού. Δηλαδή η μείωση στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι 3 μονάδες

4. Στο ΓΠ θα πρέπει να προστεθεί ο περιορισμός

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 28 \times 0.95 \Rightarrow 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 26.6$$

και η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι:  $\max x_3$ .

Σύμφωνα με τη διαδικασία ανάλυσης ευστάθειας, στο βέλτιστο πίνακα simplex γίνονται οι εξής αλλαγές:

- εισάγεται η  $\bar{4}$  ως επιπλέον βασική μεταβλητή, έτσι ώστε  $x_4 = 28 - 26.6 = 1.4$ ,
- μπαίνει μια επιπλέον στήλη για την  $\bar{4}$  στο κεντρικό μέρος του πίνακα με μηδενικά στις πρώτες τρεις γραμμές και 1 στην τελευταία,
- τα υπόλοιπα στοιχεία της 4<sup>ης</sup> γραμμής στο κεντρικό μέρος του πίνακα είναι ίσα με τα ΟΚΕ της λύσης του ερωτήματος 2 (με αντίθετα πρόσημα).

Επομένως, ο νέος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$x_B$
0	1	1	1.25	0	0	-0.5	1.5	0	2
0	$\bar{1}$	0	-2	0	1	2	-8	0	24
1	3	0	-2	1	0	2	-4	0	8
0	$\bar{4}$	0	0.5	0	0	1	1	1	1.4
$c$		0	0	1	0	0	0	0	
$\bar{c}$		0	2	0	0	-2	4	0	8

Άρα θα πρέπει να μπει στη βάση η  $\bar{3}$  στη θέση της 1.

## ΑΣΚΗΣΗ Α.25

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
30	2	1.5	1	0	0.25	0	-0.25	1.25
0	$\bar{2}$	3	0	0	0.5	1	-2.5	0.5
20	3	-1	0	1	-0.5	0	1.5	2.5
		15	30	20	0	0	0	
		-10	0	0	2.5	0	-22.5	87.5

Ο υπολογισμός των  $x_B$  έγινε από τη σχέση  $x_B = B^{-1}b$ , όπου ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι κάτω από τις μεταβλητές απόκλισης.

2. Εισάγεται στη βάση η  $\bar{1}$  στη θέση της  $\bar{2}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
30	2	0	1	0	0	-0.5	1	1
0	$\bar{1}$	6	0	0	1	2	-5	1
20	3	2	0	1	0	1	-1	3
		15	30	20	0	0	0	
		-25	0	0	0	-5	-10	90

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Η μέγιστη μείωση για το δεξιό μέλος του 2<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max \{-1/2, -3/1\} = -0.5$$

Το μέγιστη αύξηση για το δεξιό μέλος του 3<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$\lambda = \min \{-1/-5, -3/-1\} = 0.2$$

Εάν το δεξιό μέλος του 3<sup>ου</sup> περιορισμού αυξηθεί κατά 0.2, τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα αυξηθεί κατά  $0.2u_3 = 2$ , όπου  $u_3$  είναι η δυϊκή μεταβλητή του 3<sup>ου</sup> περιορισμού που είναι ίση με  $-\bar{c}_3$ .

4. Ο πίνακας του δυϊκού είναι:

$\mathbf{b}_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\mathbf{u}_B$
0	$\bar{1}$	-6	0	0	1	0	-2	25
-8	2	-2	1	0	0	0,5	-1	5
-5	3	5	0	1	0	-1	1	10
		-10	-8	-5	0	0	0	
		-1	0	0	0	-1	-3	-90

## ΑΣΚΗΣΗ A.26

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
0	$\bar{1}$	0	2	1	0	0	-1	3
2	1	1	0	0	0	0	1	3
0	$\bar{2}$	0	-1	0	1	-1	2	1
		2	3	0	0	-M	0	
		0	3	0	0	-M	-2	6

Εισάγεται στη βάση η 2 στη θέση της  $\bar{1}$ :

$\mathbf{c}_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{\bar{2}}$	$\bar{3}$	$\mathbf{x}_B$
3	2	0	1	0,5	0	0	-0,5	1,5
2	1	1	0	0	0	0	1	3
0	$\bar{2}$	0	0	0,5	1	-1	1,5	2,5
		2	3	0	0	-M	0	
		0	0	-1,5	0	-M	-0,5	10,5

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

2. Ο πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τους συντελεστές των τριών βασικών μεταβλητών (2, 1,  $\bar{2}$ ) στους περιορισμούς:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης βρίσκεται στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex, στις στήλες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές με τις οποίες ξεκίνησε η λύση του ΓΠ ( $\bar{1}, \bar{\bar{2}}, \bar{3}$ ):

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & -1 & 1,5 \end{bmatrix}$$

3. Το άνω και κάτω φράγμα είναι:

$$A\Phi(c_2) = 3 + \frac{-0,5}{-0,5} = 4 \quad K\Phi(c_2) = 3 + \frac{-1,5}{0,5} = 0$$

4. Οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{y}_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -0,5 \\ 1 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Αφού υπάρχει αρνητική τιμή, η λύση δεν είναι εφικτή. Θα πρέπει να εφαρμοστεί ο δυϊκός αλγόριθμος με εξερχόμενη τη 2 και εισερχόμενη την  $\bar{3}$ .

## ΑΣΚΗΣΗ Α.27

1. Ο πλήρης πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
2	1	1	-1	0	0	-1	1
3	3	0	2	1	0	1	2
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	2
		2	-1	3	0	0	
		0	-5	0	0	-1	8

Οι τιμές των βασικών μεταβλητών 1 και 3 εμφανίζονται

- στη στήλη final value του πίνακα variable cells στα αποτελέσματα του Excel
- στη στήλη value του 1<sup>ου</sup> πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- στον 1<sup>ο</sup> αριστερό πίνακα των αποτελεσμάτων του lp\_solve

Η τιμή της  $\bar{2}$  προκύπτει από

- τη στήλη slack του πίνακα constraints στην αναφορά λύσης του Excel
- τη στήλη slack or surplus του 1<sup>ου</sup> πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- τη στήλη result του 2<sup>ου</sup> πίνακα (constraints) στα αποτελέσματα του Lp\_solve όπου φαίνεται ότι στη βέλτιστη λύση το αριστερό μέλος του 2<sup>ου</sup> περιορισμού ισούται με 3, ενώ το δεξιό μέλος που δίνεται στην εκφώνηση είναι 1 (άρα η μεταβλητή απόκλισης είναι 2)

Το ΟΚΕ της  $\bar{3}$  είναι η δυϊκή μεταβλητή του 3<sup>ου</sup> περιορισμού με αντίθετο πρόσημο. Οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών δίνονται

- στη στήλη shadow price του πίνακα constraints στην ανάλυση ευαισθησίας Excel
- στη στήλη dual price του 1<sup>ου</sup> πίνακα των αποτελεσμάτων του Lingo
- στον δεξιό πίνακα των αποτελεσμάτων του lp\_solve

2. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα για τις δυϊκές μεταβλητές που εμφανίζονται στις αναφορές, η δυϊκή μεταβλητή του 1<sup>ου</sup> περιορισμού είναι  $u_1 = 2$ . Άρα η αύξηση του β' μέλους κατά 6 μονάδες θα αυξήσει την αντικειμενική συνάρτηση κατά 12 μονάδες (λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη ότι η μεταβολή αυτή, σύμφωνα με τις αναφορές, είναι εντός των ορίων στα οποία δεν μεταβάλλεται η ΒΕΛ)

3. Οι νέες τιμές των βασικών μεταβλητών είναι:

$$\mathbf{x}'_B = \mathbf{x}_B + \lambda \mathbf{y}_{\bar{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Η διαδικασία συνεχίζει εφαρμόζοντας τον δυϊκό αλγόριθμο με εξερχόμενη την 1 και εισερχόμενη την  $\bar{3}$

4. Για την  $x_1$  (είναι βασική):

- $K\Phi(c_1) = c_1 + \max_{j \in B, y_{1j} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = -\infty$  (αφού δεν υπάρχει πηλίκο με  $y_{1j} > 0$ )
- $A\Phi(c_1) = c_1 + \min_{j \in B, y_{1j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{1j}} \right\} = 2 + \min \left\{ \frac{-5}{-1}, \frac{-1}{-1} \right\} = 3$

Για την  $x_2$  (είναι μη βασική):

- $K\Phi(c_2) = -\infty$  (γιατί είναι εκτός βάσης)
- $A\Phi(c_2) = c_2 - c_{\bar{2}} = 4$

Για την  $x_3$  (είναι βασική):

- $K\Phi(c_3) = c_3 + \max_{j \in B, y_{3j} > 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{3j}} \right\} = 3 + \max_{j \in B, y_{1j} > 0} \left\{ \frac{-5}{2}, \frac{-1}{1} \right\} = 2$
- $A\Phi(c_3) = c_3 + \min_{j \in B, y_{3j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{y_{3j}} \right\} = +\infty$  (αφού δεν υπάρχει πηλίκο με  $y_{3j} < 0$ )

5. Ο νέος πίνακας είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
2.5	1	1	-1	0	0	-1	1
2	3	0	2	1	0	1	2
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	2
		2.5	-1	2	0	0	
		0	-2.5	0	0	0.5	6.5

Εισέρχεται η  $\bar{3}$  στη θέση της 3:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
2.5	1	1	1	1	0	0	3
0	$\bar{3}$	0	2	1	0	1	2
0	$\bar{2}$	0	3	0	1	0	2
		2.5	-1	2	0	0	
		0	-3.5	-0.5	0	0	7.5

## ΑΣΚΗΣΗ A.28

1. (α) Οι τιμές των μεταβλητών απόφασης είναι  $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 4$  (πίνακας variable cells στο Excel, 1<sup>ος</sup> πίνακας LINGO, αριστερός πίνακας LP\_Solve) και η τιμή της αντικειμενικής είναι 23 (πίνακας objective cell στο Excel, objective value στο LINGO, αριστερός πίνακας LP\_Solve).

(β) Τα ΟΚΕ είναι  $\bar{c}_3 = -4$  και τα υπόλοιπα μηδέν (στήλη reduced cost στον πίνακα variable cells της ανάλυσης ευαισθησίας στο Excel, ίδια στήλη στον 1<sup>ο</sup> πίνακα του LINGO, στήλη value στον δεξιό πίνακα του LP\_Solve για τα  $x_1 - x_4$ ).

(γ) Οι δυϊκές μεταβλητές είναι  $u_1 = 2, u_2 = 0,5, u_3 = 1,5$  (στήλη shadow prices στον πίνακα constraints της ανάλυσης ευαισθησίας στο Excel, dual prices στο LINGO, στήλη value στον δεξιό πίνακα του LP\_Solve για τους 3 περιορισμούς). Η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι 23 (όση και του πρωτεύοντος στη βέλτιστη λύση).

2. Ο συμπληρωμένος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
-1	1	1	0	-2	0	1	0	0	1
0	$\bar{2}$	0	2	4	0	2	1	1	20
1	4	0	1	4	1	2	0	1	14
		-1	2	4	1	0	0	0	
		0	1	-2	0	-1	0	-1	13

Εισάγεται στη βάση η 2 στη θέση της  $\bar{2}$ :

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
-1	1	1	0	-2	0	1	0	0	1
2	2	0	1	2	0	1	0,5	0,5	10
1	4	0	0	2	1	1	-0,5	0,5	4
		-1	2	4	1	0	0	0	
		0	0	-4	0	-2	-0,5	-1,5	23

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση.

3. Ο πίνακας της βάσης διαμορφώνεται από τους συντελεστές των 3 βασικών μεταβλητών στους περιορισμούς του ΓΠ, ενώ ο αντίστροφός του είναι στο κεντρικό μέρος του πίνακα simplex στις στήλες των μεταβλητών απόκλισης:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

4. Η μέγιστη μείωση για το δεξιό μέλος του 3<sup>ου</sup> περιορισμού είναι:

$$\lambda = \max \{-10 / 0,5, -4 / 0,5\} = -8$$

Η μέγιστη αύξηση δεν ορίζεται γιατί στη στήλη του κεντρικού πίνακα simplex που αντιστοιχεί στη μεταβλητή απόκλισης του 3<sup>ου</sup> περιορισμού δεν υπάρχει στοιχείο που να είναι αυστηρά αρνητικό.

Επομένως, ο δεξιό μέλος του 3<sup>ου</sup> περιορισμού μπορεί να κυμανθεί στο διάστημα  $[4, +\infty]$

Εάν το δεξιό μέλος του 3<sup>ου</sup> περιορισμού μειωθεί κατά 8, τότε η αντικειμενική συνάρτηση θα μεταβληθεί κατά  $-8u_3$ , όπου  $u_3 = 1,5$  είναι η δυϊκή μεταβλητή του 3<sup>ου</sup> περιορισμού. Επομένως, η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης θα είναι  $-8 \times 1,5 = -12$ . Οποιαδήποτε αύξηση του β' μέλους του 3<sup>ου</sup> περιορισμού κατά  $\lambda$  θα οδηγήσει σε ανάλογη αύξηση της αντικειμενικής κατά  $1,5\lambda$ .

### ΑΣΚΗΣΗ Β.3

Συμβολίζοντας ως  $x_i \in \{0, 1\}$  τις μεταβλητές απόφασης ορισμένες έτσι ώστε  $x_i = 0 \Leftrightarrow$  δεν επιλέγεται η τοποθεσία  $s_i$  και  $x_i = 1 \Leftrightarrow$  επιλέγεται η τοποθεσία  $s_i$  το αμέγαλο πρόγραμμα είναι:

$$\min z = \sum_{i=1}^{20} c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \text{υπ: } & x_2 - x_3 \leq 0 \quad (\text{η } s_2 \text{ απαιτεί την } s_3) \\ & x_1 + x_4 \leq 1 \quad (\text{η } s_1 \text{ απαιτεί την } s_4) \\ & x_5 + x_9 \geq 1 \quad (\text{τουλάχιστον μία από τις } s_5, s_9) \\ & \sum_{i=1}^{20} p_i x_i \geq p \quad (\text{δυναμικότητα}) \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \sum s_i = 10 \end{aligned}$$

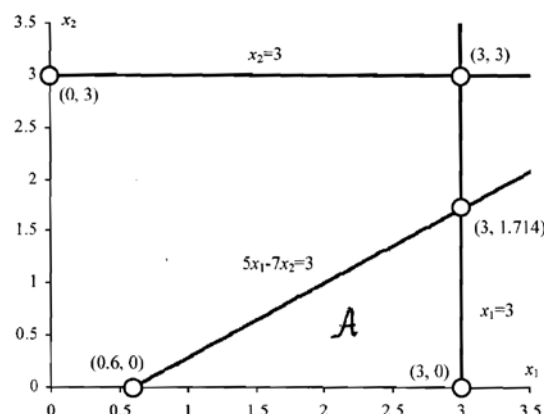
### ΑΣΚΗΣΗ Β.4

Συμβολίζουμε με  $x_i \in \{0, 1\}$  τις μεταβλητές απόφασης έτσι ώστε  $x_i = 0 \Leftrightarrow$  επιλέγεται ο αριθμός  $n_i$  και  $x_i = 1$  επιλέγεται ο αριθμός  $n_i$ . Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \min z &= y^+ + y^- \\ \text{υπ: } & \sum_{i=1}^k n_i x_i + y^+ - y^- = a \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \sum x_i \geq 1 \\ & y^+, y^- \geq 0 \end{aligned}$$

### ΑΣΚΗΣΗ Β.5

1)



Από τις τρεις βασικές επιλυτές λύσεις, η μέγιστη επί η της αντικειμενικής συνάρτησης επιτυγχάνεται στο σημείο  $(3, 1.714)$ . Άρα αυτή είναι η βέλτιστη λύση με  $z^* = -0.43$

2)

Αφού η λύση δεν είναι ακέραια ερρογυλοποιείται προς μια ακέραια επιλυτή λύση. Αυτή είναι η  $(3, 1)$  με  $z = -4 = K^*$ .  
Ελέγχονται οι περιπτώσεις  $x_2 \leq 1$  και  $x_2 \geq 2$

Για  $x_2 \leq 1$  υπάρχουν τέσσερις ΒΕΛ:

- $(0.6, 0)$  με  $z = -1.8$
- $(3, 0)$  με  $z = -9$
- $(3, 1)$  με  $z = -4$
- $(2, 1)$  με  $z = -1 \rightarrow$  βέλτιστο

Για  $x_2 \geq 2$  το πρόβλημα είναι αδύνατο

Αφού η λύση  $(2, 1)$  είναι ακέραια, η διαδικασία σταματά. Η βέλτιστη λύση είναι:

$$x_1 = 2, x_2 = 1 \text{ με } z = -1$$

## ΑΣΚΗΣΗ Β.6

$$\min \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\text{υπ.} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \text{ για κάθε } i=1, 2, \dots, m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$$



## ΑΣΚΗΣΗ Β.7

1)

Ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{αν δεν επιλέγεται η λύση } i \\ 1 & \text{" " " " } i \end{cases}$$

$$\max \sum_{i \in D} s_i x_i$$

$$\text{un. } \sum_{i \in D} a_i x_i \leq n_a$$

$$\sum_{i \in D} b_i x_i \leq n_b$$

⋮

$$\sum_{i \in D} w_i x_i \leq n_w$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

2)

α)

Αλλά αλλάζει η αντικειμενική:

$$\max \sum_{i \in D} x_i$$

β)

$$\max \sum_{i \in D} s_i x_i + \sum_{i \in D} \sum_{\substack{j \in D \\ j \neq i}} s_{ij} y_{ij}$$

$$\text{un. } \sum_{i \in D} a_i x_i \leq n_a$$

⋮

$$\sum_{i \in D} w_i x_i \leq n_w$$

$$x_i + x_j - 2y_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i, j \in D \text{ με } i \neq j$$

$$x_i, y_{ij} \in \{0, 1\}$$

γ)

Τα  $n_a, n_b, \dots, n_w$  θεωρούνται μεταβλητές απόφασης (αιρέαιες)  
και εισάγεται ο περιορισμός

$$n_a + n_b + \dots + n_w \leq 100$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.8

- α) Οι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι ισχύει τουλάχιστον ένα από τις ανισότητες  $f_1(x) \leq b_1$  και  $f_2(x) \leq b_2$
- β) Οι περιορισμοί υποδηλώνουν ότι  $f(x) \in \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$
- γ) Το σύνολο των επιτυχών λύσεων της γραμμικής χαλάρωσης είναι υπερσύνολο των επιτυχών λύσεων του αμέρσιου  $IP$
- δ) Το ΚΦ αντιστοιχεί στην υψηλότερη τιμή της αντικειμενικής με βάση τις αμέρσιες λύσεις που έχουν εντοπιστεί

## ΑΣΚΗΣΗ B.11

1)

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{αν χρησιμοποιηθεί το κουτί } j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντικειμενική =  $\min$  το πλήθος των κουτιών που θα χρησιμοποιηθούν

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν το αντικείμενο } i \text{ τοποθετείται στο κουτί } j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} = 1 \rightarrow \text{κάθε αντικείμενο } i \text{ να μπει σε ένα κουτί}$$

$$w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \dots + w_n x_{nj} \leq C y_j \rightarrow \text{Αν χρησιμοποιηθεί το κουτί } j \text{ τότε μπορεί μεταφέρει αντικείμενα συνολικού βάρους το πολύ } C$$

2α)

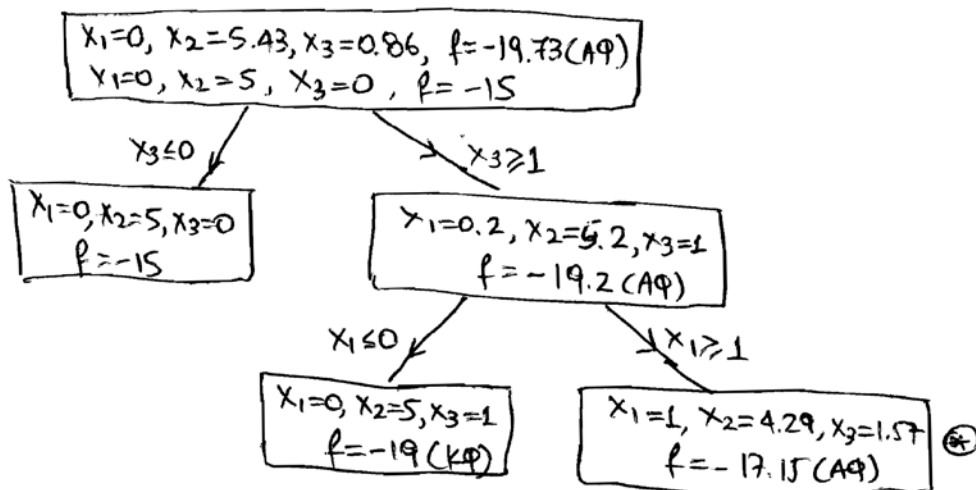
$$x_{kj} + x_{lj} \leq 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$$

2β)

$$x_{1b} + x_{2b} + \dots + x_{nb} \geq 1$$

## ΑΣΚΗΣΗ Β.12

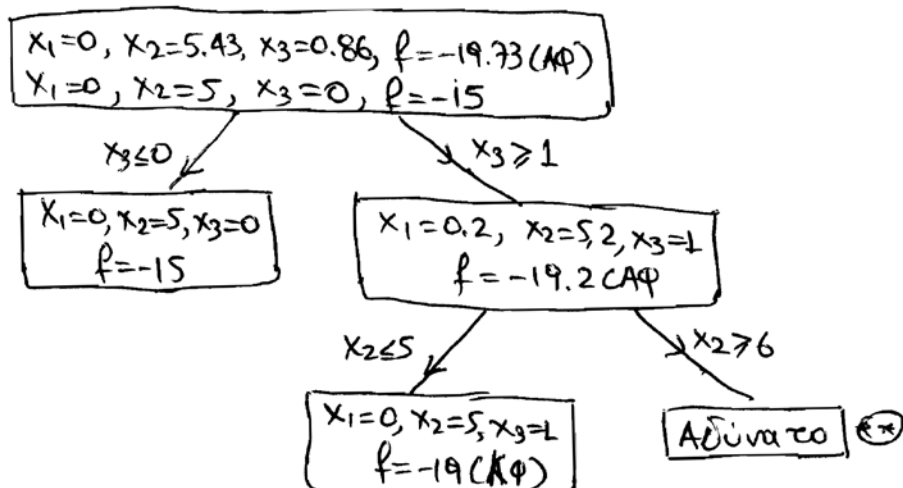
1)



Το πρόβλημα είναι ελαχιστοποίησης, οπότε το καλύτερο τερατεύον είναι εάν  $K\Phi \leq AP$ .

Οπότε στο παραπάνω δέντρο η λύση  $(0, 5, 1)$  είναι βέλτεστη γιατί το  $AP$  στον κόμβο (\*) είναι μεγαλύτερο από το  $K\Phi$ .

Στο 2ο δέντρο:



Η λύση  $(0, 5, 1)$  είναι βέλτεστη γιατί είναι η καλύτερη ανέραση και επιπλέον στον (\*\*) κόμβο το πρόβλημα είναι αδύνατο, αφού δεν είναι δυνατόν με  $x_2 \geq 6$  να ικανοποιηθεί ο περιορισμός  $3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 10$ .

2)

Αρκει να γίνει η αντικατάσταση:

$$x_2 = 1.7y_1 + 3y_2 + 4.4y_3 + 5.5y_4$$

$$\text{με } y_1, y_2, y_3, y_4 \in \{0, 1\}$$

και να γίνει ο περιορισμός

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1$$

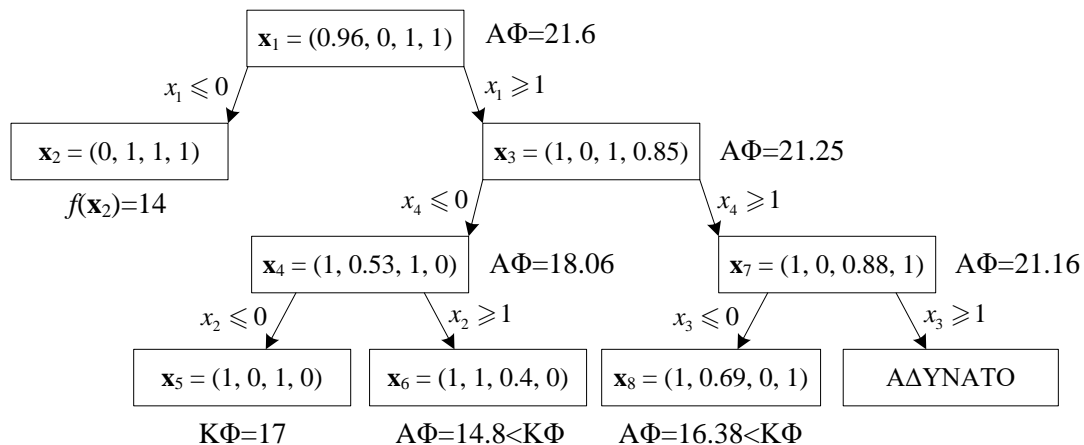
## ΑΣΚΗΣΗ B.13

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $x_i \in \{0,1\}$  τέτοιες ώστε  $x_i = 1$  εάν και μόνο εάν επιλέγεται το διαφημιστικό μέσο  $i$ . Επιπλέον ορίζεται η μεταβλητή  $y \in \{0,1\}$ , τέτοια ώστε  $y = 0$  τότε επιλέγεται τουλάχιστον ένα από τα  $\{\Delta 1, \Delta 4\}$ , ενώ  $y = 1$  τότε επιλέγεται τουλάχιστον ένα από τα  $\{\Delta 2, \Delta 3\}$ . Το ακέραιο πρόγραμμα είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & 1000x_1 + 200x_2 + 300x_3 + 400x_4 + 450x_5 + 450x_6 \\ \text{Υπ.} \quad & 500x_1 + 150x_2 + 300x_3 + 250x_4 + 250x_5 + 150x_6 \leq 1800 \\ & x_6 - x_4 \leq 0 \text{ (συνθήκη } \alpha) \\ & x_2 + x_5 \leq 1 \text{ (συνθήκη } \beta) \\ & x_1 + x_4 + My \geq 2 \text{ (συνθήκη } \gamma) \\ & x_2 + x_3 + M(1-y) \geq 2 \text{ (συνθήκη } \gamma) \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y \in \{0,1\} \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.14

Το πλήρες δέντρο επίλυσης είναι:



Άρα η βέλτιστη λύση είναι η  $x_5$ .

## ΑΣΚΗΣΗ B.15

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $x_A, x_B, x_\Gamma$  που αναπαριστούν το ύψος της παραγωγής και δυαδικές μεταβλητές  $y_A, y_B, y_\Gamma$ , τέτοιες ώστε

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{εάν } x_i = 0 \\ 1 & \text{εάν } x_i \geq 1000 \end{cases}, \quad i \in \{A, B, \Gamma\}$$

Το ακέραιο ΓΠ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 2000x_A + 3000x_B + 4000x_T \\
\text{υ.π.} \quad & 1.5x_A + 3x_B + 5x_T \leq 6000 \\
& 30x_A + 25x_B + 40x_T \leq 60000 \\
& x_i - My_i \leq 0, \quad i \in \{A, B, T\} \\
& x_i - 1000y_i \geq 0, \quad i \in \{A, B, T\} \\
& x_A, x_B, x_T \in \mathbb{N} \\
& y_A, y_B, y_T \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.16

α) Ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης  $x_1, x_2, \dots, x_n$  τέτοιες ώστε  $x_i = 1$  εάν και μόνο εάν επιλέγεται το κομμάτι  $i$ . Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n \\
\text{υ.π.} \quad & d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n \leq 4800 \\
& \sum_{i \in A_j} x_i \leq 1, \quad \forall j \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

β) Ο πρώτος περιορισμός υπονοεί ότι

$$\sum_{i \in G_\ell} x_i > 0 \Rightarrow y_\ell = 1$$

Ο δεύτερος περιορισμός υπονοεί ότι

$$y_\ell = 1 \Rightarrow \sum_{i \in G_\ell} x_i > 0$$

Άρα οι δύο περιορισμοί μαζί υπονοούν ότι:

$$y_\ell = 1 \Leftrightarrow \sum_{i \in G_\ell} x_i > 0$$

Δηλαδή ότι  $y_\ell = 1$  εάν και μόνο εάν επιλεγούν κομμάτια από το είδος  $\ell$

Ο τρίτος περιορισμός υπονοεί ότι θα πρέπει να επιλεγούν κομμάτια το πολύ από τρία διαφορετικά είδη.

## ΑΣΚΗΣΗ B.17

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης:

$x_i$  = ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν  $i$

$y_i = 1$  εάν και μόνο εάν το προϊόν  $i$  θα παραχθεί και 0 διαφορετικά

Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned}
& \max \quad 70x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 80x_4 - 50000y_1 - 40000y_2 - 70000y_3 - 60000y_4 \\
& \text{υ.π.} \quad x_i \leq My_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
& \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2 \\
& \quad y_3 \leq y_1 + y_2 \\
& \quad y_4 \leq y_1 + y_2 \\
& \quad x_i \geq 0, \quad y_i \in \{0,1\} \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.18

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $y_1, \dots, y_8 \in \{0,1\}$  τέτοιες ώστε  $y_i = 1$  εάν και μόνο εάν θα χρησιμοποιηθεί ο δέκτης στο σημείο  $i$  και  $x_{ij} \in \{0,1\}$  τέτοιες ώστε  $x_{ij} = 1$  εάν και μόνο εάν ο δέκτης  $j$  θα λαμβάνει στοιχεία από το μετρητή  $i$ . Τότε το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned}
& \min \quad y_1 + \dots + y_8 \\
& \text{υ.π.} \quad \sum_{i \in A_j} x_{ij} \leq 3y_j, \quad j = 1, \dots, 8 \\
& \quad \sum_{j \in B_i} x_{ij} \geq 1, \quad i = 1, \dots, 10 \\
& \quad x_{ij}, y_i \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Όπου  $A_j$  είναι το σύνολο των μετρητών με τους οποίους μπορεί να επικοινωνήσει ο δέκτης  $j$  και  $B_i$  είναι το σύνολο των δεκτών που μπορούν να δεχτούν δεδομένα από το μετρητή  $i$ .

## ΑΣΚΗΣΗ B.19

α) Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ερμηνεύεται ως εξής:

- Μεταβλητές απόφασης:  
 $x_{ij} = 1$  εάν η διδασκαλία του μαθήματος  $i$  ανατεθεί στην εταιρία  $j$ , και  $x_{ij} = 0$  διαφορετικά.  
 $y_j = 1$  εάν στην εταιρία  $j$  ανατεθεί ένα τουλάχιστον μάθημα και  $y_j = 0$  διαφορετικά.
- Αντικειμενική συνάρτηση: αναφέρεται στο συνολικό κόστος οργάνωσης του προγράμματος εκπαίδευσης, και αναλύεται σε δύο διαστάσεις:

- ο Το μεταβλητό κόστος των μαθημάτων:  $\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij}$

- ο Το σταθερό κόστος, το οποίο αναφέρεται στις εταιρίες που θα χρησιμοποιηθούν:  $\sum_{j=1}^5 T_j y_j$

- Περιορισμοί:  
ο Ο 1<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι:

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} > 0 \Rightarrow y_j = 1$$

Δηλαδή εάν ανατεθεί έστω και ένα μάθημα στην εταιρία  $j$ , τότε  $y_j = 1$

- ο Ο 2<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι κάθε μάθημα θα ανατεθεί σε μία μόνο εταιρία συμβούλων.

β) Οι δύο αυτοί επιπλέον περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

(1)  $y_k + y_\ell \leq 1$

(2)  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 2$

## ΑΣΚΗΣΗ B.20

1) Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

$x_{ij} = 1$  εάν η περιοχή  $i$  εξυπηρετηθεί από το κέντρο στο σημείο  $j$ , διαφορετικά  $x_{ij} = 0$

$y_j = 1$  εάν κατασκευαστεί κέντρο υγείας στο σημείο  $j$ , διαφορετικά  $y_j = 0$

Οι περιορισμοί ερμηνεύονται ως εξής

- Ο 1<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι κάθε περιοχή θα καλυφθεί από ένα μόνο κέντρο.
- Σύμφωνα με τον 2<sup>ο</sup> περιορισμό εάν  $y_j = 0$  τότε  $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{Lj} = 0$ , δηλαδή εάν δεν φτιαχτεί το κέντρο υγείας  $j$ , τότε καμία περιοχή δεν μπορεί να ανατεθεί σε αυτό
- Σύμφωνα με τον 3<sup>ο</sup> περιορισμό εάν  $y_j = 1$  τότε  $x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{Lj} \geq 1$ , δηλαδή εάν φτιαχτεί το κέντρο υγείας  $j$ , τότε τουλάχιστον μία περιοχή θα πρέπει να ανατεθεί σε αυτό
- Στον 4<sup>ο</sup> περιορισμό το άθροισμα  $d_{i1}x_{i1} + d_{i2}x_{i2} + \dots + d_{iL}x_{iL}$  αναπαριστά την απόσταση της περιοχής  $i$  από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί. Στο πρόβλημα υπάρχουν  $L$  τέτοιοι περιορισμοί, ένας για κάθε περιοχή. Οι περιορισμοί αυτοί είναι της μορφής:

$D \geq$  απόσταση περιοχής 1 από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

$D \geq$  απόσταση περιοχής 2 από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

.....

$D \geq$  απόσταση περιοχής  $L$  από το κέντρο στο οποίο θα ανατεθεί

Δηλαδή η μεταβλητή απόφασης  $D$  αντιστοιχεί σε έναν αριθμό που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τη μέγιστη απόσταση μιας οποιαδήποτε περιοχής από το κέντρο που θα ανατεθεί.

- Στον 5<sup>ο</sup> περιορισμό το άθροισμα  $p_1x_{1j} + p_2x_{2j} + \dots + p_Lx_{Lj}$  αναπαριστά τον συνολικό πληθυσμό των περιοχών που θα εξυπηρετούνται από το κέντρο στο σημείο  $j$ . Επομένως η μεταβλητή  $s_j$  αναπαριστά τον πληθυσμό που θα εξυπηρετείται από το κέντρο  $j$ .
- Στον 6<sup>ο</sup> περιορισμό το άθροισμα  $1000s_1 + 1000s_2 + \dots + 1000s_L$  αναπαριστά το κόστος κατασκευής των κέντρων. Επομένως ο περιορισμός αυτός διασφαλίζει ότι το συνολικό κόστος κατασκευής των κέντρων δεν θα υπερβεί το διαθέσιμο προϋπολογισμό  $B$ .

Τέλος, με βάση την ερμηνεία του 3<sup>ου</sup> περιορισμού εξάγεται το συμπέρασμα ότι στόχος αυτού του ακέραιου ΓΠ είναι η διαμόρφωση ενός σχεδιασμού που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των περιοχών και των κέντρων από τα οποία θα εξυπηρετούνται.

2) Εάν  $z = 0$ , τότε οι δύο περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

$$y_1 + y_2 \geq 0$$

$$y_3 + y_4 \geq 2$$

Ο 1<sup>ος</sup> περιορισμός ισχύει εξορισμού, ενώ ο 2<sup>ος</sup> διασφαλίζει ότι θα φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 3 και 4.

Εάν  $z = 1$ , τότε οι δύο περιορισμοί διατυπώνονται ως εξής:

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

$$y_3 + y_4 \geq 0$$

Ο 1<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι θα φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 1 και 2, ενώ ο 2<sup>ος</sup> ισχύει εξορισμού.

Επομένως, οι δύο περιορισμοί μαζί υποδηλώνουν ότι θα πρέπει να φτιαχτούν κέντρα στα σημεία 1 και 2 (περίπτωση  $z = 1$ ) ή/και στα σημεία 3 και 4 (περίπτωση  $z = 0$ ).

## ΑΣΚΗΣΗ B.21

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης:

$x_{ij} = 1$  εάν η μηχανή  $i$  θα εκτελέσει την εργασία  $j$ , διαφορετικά  $x_{ij} = 0$

$y_i = 1$  εάν χρησιμοποιηθεί η μηχανή  $i$ , διαφορετικά  $y_i = 0$

Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\min \quad 42x_{11} + 70x_{12} + 93x_{13} + 85x_{22} + 45x_{23} + 58x_{31} + 37x_{34} + 58x_{41} + 55x_{43} + 62x_{44} + 30y_1 + 40y_2 + 50y_3 + 60y_4$$

$$\text{Υπό: } x_{11} + x_{31} + x_{41} = 1$$

$$x_{12} + x_{22} = 1$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{43} = 1$$

$$x_{34} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - 4y_1 \leq 0$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - 4y_2 \leq 0$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} - 4y_3 \leq 0$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} - 4y_4 \leq 0$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.22

Οι μεταβλητές απόφασης είναι:

$x_i$  = ποσότητα που θα παραχθεί από το προϊόν  $i$

$y_i = 1$  εάν και μόνο εάν το προϊόν  $i$  θα παραχθεί και 0 διαφορετικά

Η αντικειμενική συνάρτηση μετρά το κέρδος από την παραγωγή των προϊόντων (έσοδα από την παραγωγή μείον τα έξοδα προετοιμασίας για την παραγωγή των προϊόντων).

Οι 2 πρώτοι περιορισμοί καθορίζουν τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών  $x_1, y_1$  και  $x_2, y_2$ . Συγκεκριμένα, διασφαλίζουν ότι:

$$x_1 > 0 \Leftrightarrow y_1 = 1$$

$$x_2 > 0 \Leftrightarrow y_2 = 1$$

Οι περιορισμοί 3 και 4 σχετίζονται με την παραγωγική ικανότητα των εργοστασίων. Τα δεξιά μέλη των περιορισμών είναι ο διαθέσιμος χρόνος λειτουργίας των εργοστασίων, ενώ οι συντελεστές των μεταβλητών αφορούν το χρόνο που απαιτεί η παραγωγή ενός τεμαχίου κάθε προϊόντος σε κάθε εργοστάσιο. Για την ερμηνεία της μεταβλητής απόφασης  $z$ , έστω ότι  $z = 0$ . Τότε:

$$0.02x_1 + 0.025x_2 \leq 500$$

$$0.025x_1 + 0.04x_2 \leq 700 + M$$

Δηλαδή εάν  $z = 0$ , τότε στο πρόβλημα εισάγεται ο περιορισμός που αφορά το 1<sup>ο</sup> εργοστάσιο, ενώ επειδή  $M \gg 0$ , ο περιορισμός που αφορά το 2<sup>ο</sup> εργοστάσιο ουσιαστικά διαγράφεται αφού κάθε λύση τον ικανοποιεί. Επομένως, η περίπτωση  $z = 0$  αντιστοιχεί στην παραγωγή των προϊόντων από το 1<sup>ο</sup> εργοστάσιο.

Αντίστοιχα, εάν  $z = 1$ :

$$0.02x_1 + 0.025x_2 \leq 500 + M$$

$$0.025x_1 + 0.04x_2 \leq 700$$

Δηλαδή εάν  $z = 1$ , τότε στο πρόβλημα εισάγεται ο περιορισμός που αφορά το 2<sup>ο</sup> εργοστάσιο, ενώ ο περιορισμός που αφορά το 1<sup>ο</sup> εργοστάσιο ουσιαστικά διαγράφεται αφού κάθε λύση τον ικανοποιεί. Επομένως, η περίπτωση  $z = 1$  αντιστοιχεί στην παραγωγή των προϊόντων από το 2<sup>ο</sup> εργοστάσιο.



## ΑΣΚΗΣΗ B.23

- 1) Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $x_{ij}$  που αναπαριστούν την ποσότητα από την παραγωγή του εργοστασίου  $i$  που θα χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη της ζήτησης του πελάτη  $j$ . Επίσης ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης  $y_j$  που αναπαριστούν εάν θα κατασκευαστεί το εργοστάσιο  $j$  ( $y_j = 1$ ) ή όχι ( $y_j = 0$ ). Το ακέραιο ΓΠ διαμορφώνεται ως εξής:

$$\min \quad 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 8x_{21} + 7x_{22} + 2x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} + x_{33} + 500y_1 + 500y_2 + 500y_3$$

$$\text{Υπ} \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 20$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 50$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} - 100y_1 \leq 0$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} - 100y_2 \leq 0$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} - 100y_3 \leq 0$$

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$$

$$y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\}$$

- 2) Θα πρέπει να προστεθεί ο περιορισμός  $x_{11} + x_{12} + x_{13} - 30y_1 \geq 0$ . Με βάση αυτόν τον περιορισμό, εάν κατασκευαστεί το εργοστάσιο E1 ( $y_1 = 1$ ), τότε  $x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 30$  (η παραγωγή του εργοστασίου θα είναι τουλάχιστον 30.000 μονάδες), διαφορετικά εάν δεν κατασκευαστεί ( $y_1 = 0$ ), τότε σύμφωνα με τον 4<sup>ο</sup> περιορισμό και τη μη αρνητικότητα των μεταβλητών απόφασης, προκύπτει ότι  $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 0$ .

## ΑΣΚΗΣΗ B.24

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $y_{ij} \in \{0, 1\}$ , τέτοιες ώστε  $y_{ij} = 1$  εάν και μόνο εάν στον πελάτη  $j$  παραδοθούν  $i$  αεροσκάφη. Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\max \quad -y_{11} + 2y_{21} + 4y_{31} + y_{12} + 5y_{22} + y_{13} + 3y_{23} + 5y_{33} + 6y_{53} + 7y_{53}$$

$$\text{Υπ} \quad y_{11} + y_{21} + y_{31} = 1$$

$$y_{21} + y_{22} = 1$$

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35} = 1$$

$$0.2(y_{11} + 2y_{21} + 3y_{31}) + 0.4(y_{21} + 2y_{22}) + 0.2(y_{31} + 2y_{32} + 3y_{33} + 4y_{34} + 5y_{35}) \leq 1$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.25

- Η αντικειμενική συνάρτηση μετρά το συνολικό χρόνο μετακίνησης όλων των πωλητών.
- Το 1<sup>ο</sup> ζεύγος περιορισμών διασφαλίζει ότι θα γίνουν  $m$  μετακινήσεις από το σημείο 0 προς άλλους προορισμούς και αντίστοιχα  $m$  μετακινήσεις από άλλους προορισμούς προς το σημείο 0. Δηλαδή κάθε πωλητής θα μετακινηθεί από το σημείο εκκίνησης προς κάποιο προορισμό και όλοι οι πωλητές θα πρέπει να επιστρέψουν στο σημείο εκκίνησης.
- Ο 3<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι από κάθε σημείο  $i$  θα πρέπει να υπάρχει μια μετακίνηση προς ένα από τα υπόλοιπα σημεία. Αντίστοιχα, ο 4<sup>ος</sup> περιορισμός διασφαλίζει ότι η μετακίνηση σε κάποιο σημείο  $j$  θα πρέπει να γίνει από έναν από τους υπόλοιπους προορισμούς.
- Ο τελευταίος προορισμός εξασφαλίζει ότι δεν μπορούν να υπάρξουν υποδιαδρομές, δηλαδή κλειστές διαδρομές μεταξύ ενός συνόλου προορισμών που δεν συνδέονται με τους υπόλοιπους. Πχ. έστω ότι υπάρχει μια κλειστή διαδρομή μεταξύ των προορισμών 1, 2 και 3, έτσι ώστε  $x_{12} = 1$ ,  $x_{23} = 1$  και  $x_{31} = 1$ . Τότε:

$$t_1 - t_2 + (n - m + 1)x_{12} \leq n - m \quad t_2 - t_3 + (n - m + 1)x_{23} \leq n - m \quad t_3 - t_1 + (n - m + 1)x_{31} \leq n - m$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι  $3(n - m + 1) \leq 3(n - m) \Rightarrow 3 \leq 0$  που είναι αδύνατο.

Στους περιορισμούς αυτούς οι μεταβλητές  $t$  υποδηλώνουν τη σειρά με την οποία γίνεται η μετακίνηση στους προορισμούς. Πχ αν  $x_{ij} = 1$  (υπάρχει μετακίνηση από το σημείο  $i$  στο  $j$ ), τότε ο περιορισμός διαμορφώνεται ως  $t_j \geq t_i + 1$ , δηλαδή η σειρά  $t_j$  του προορισμού  $j$  στη διαδρομή που ακολουθεί κάποιος πωλητής θα πρέπει να έπεται της σειράς του προορισμού  $i$ . Διαφορετικά, εάν  $x_{ij} = 0$  (δεν υπάρχει μετακίνηση από το σημείο  $i$  στο  $j$ ), τότε ο περιορισμός διαμορφώνεται ως  $t_i - t_j \leq n - m$ , δηλαδή η διαφορά μεταξύ της σειράς με την οποία θα γίνει η μετακίνηση στους προορισμούς  $i$  και  $j$  θα είναι το πολύ  $n - m$  (εφόσον ο μέγιστος αριθμός προορισμών που μπορεί να επισκεφτεί ένας πωλητής είναι  $n - m + 1$ , η διαφορά  $t_i - t_j$  δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από  $n - m$ ).

## ΑΣΚΗΣΗ B.26

Ορίζονται μεταβλητές απόφασης  $x_i \geq 0$  που υποδεικνύουν τη ποσότητα νερού που θα επεξεργάζεται κάθε μονάδα  $i$  και επιπλέον μεταβλητές  $y_i \in \{0, 1\}$  τέτοιες ώστε  $y_i = 1$  εάν κατασκευαστεί η μονάδα  $i$ , διαφορετικά  $y_i = 0$ . Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 500\,000y_1 + 300\,000y_2 + 100\,000y_3$$

$$\text{Υπ} \quad 0.4x_1 + 0.25x_2 + 0.2x_3 \geq 80\,000$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.25x_3 \geq 50\,000$$

$$20\,000y_1 \leq x_1 \leq 100\,000y_1$$

$$20\,000y_2 \leq x_2 \leq 200\,000y_2$$

$$20\,000y_3 \leq x_3 \leq 150\,000y_3$$

$$x_i \geq 0$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.27

Ορίζονται μεταβλητές  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  και  $y_j \in \{0, 1\}$ , τέτοιες ώστε  $x_{ij} = 1$  μόνο εάν το μήνυμα  $i$  περιληφθεί στο διάλειμμα  $j$  (προφανώς χρειάζονται το πολύ 8 διαλείμματα όσες και οι καταχωρήσεις) και  $y_j = 1$  μόνο εάν χρησιμοποιηθεί το διάλειμμα  $j$ . Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\min \quad y_1 + y_2 + \dots + y_8$$

$$\text{Υπ} \quad 15x_{1j} + 16x_{2j} + 20x_{3j} + 25x_{4j} + 30x_{5j} + 35x_{6j} + 40x_{7j} + 50x_{8j} \leq 60y_j \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

$$x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{i8} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

$$x_{3j} + x_{4j} \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.28

1. Ορίζονται μεταβλητές  $x_i \in \{0, 1\}$ , τέτοιες ώστε  $x_i = 1$  μόνο εάν χρηματοδοτηθεί το έργο  $i$  (διαφορετικά  $x_i = 0$ ). Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\max \quad p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N$$

$$\text{Υπ} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \leq C$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq K$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

2. Ορίζονται επιπλέον μεταβλητές  $y_j \in \{0,1\}$ , τέτοιες ώστε  $y_j = 1$  μόνο εάν χρηματοδοτηθούν όλα τα έργα της ομάδας  $j$ . Συμβολίζοντας ως  $G_j$  το σύνολο των έργων της ομάδας  $j$  και ως  $n_j$  το αντίστοιχο πλήθος των έργων της ομάδας, το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N) + (s_1y_1 + s_2y_2 + \dots + s_Ry_R) \\ \text{Υπ} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_Nx_N \leq C \\ & x_1 + x_2 + \dots + x_N \leq K \\ & \sum_{i \in G_j} x_i - n_j y_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, R \\ & x_i, y_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει υπόψη τόσο το όφελος από την αυτοτελή υλοποίηση των έργων, όσο και τα συνεργατικά οφέλη  $s_1y_1 + s_2y_2 + \dots + s_Ry_R$ . Ο 3<sup>ος</sup> περιορισμός εξασφαλίζει ότι εάν  $y_j = 1$ , τότε θα υλοποιηθούν όλα τα έργα της ομάδας  $j$ , δηλαδή  $\sum_{i \in G_j} x_i = n_j$ , ενώ εάν  $y_j = 0$ , τότε θα υλοποιηθούν μόνο κάποια έργα της ομάδας  $j$  (ή και κανένα), δηλαδή  $\sum_{i \in G_j} x_i \geq 0$ .

## ΑΣΚΗΣΗ B.29

Ορίζονται μεταβλητές  $x_i \in \{0,1\}$  τέτοιες ώστε  $x_i = 1$  μόνο εάν υλοποιηθεί η επιλογή  $E_i$ . Επίσης ορίζεται μια μεταβλητή απόφασης  $y \in \{0,1\}$  τέτοια ώστε εάν  $y = 0$  τότε πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον μία από τις επιλογές  $E1$  και  $E7$ , ενώ εάν  $y = 1$  τότε πρέπει να υλοποιηθεί τουλάχιστον μία από τις επιλογές  $E3$  και  $E8$ . Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 5x_5 + 2x_6 + 7x_7 + 3x_8 + 10x_9 + 7x_{10} \\ \text{Υπ} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 3x_7 + 4x_8 + 8x_9 + 7x_{10} \leq 30 \quad (\text{περιορισμός κόστους}) \\ & x_4 + x_5 + x_6 \leq 1 \quad (\text{περιορισμός για τις E4-E6}) \\ & -x_2 + x_{10} \leq 0 \quad (\text{περιορισμός για τις E2 \& E10}) \\ & x_1 + x_7 + My \geq 1 \\ & x_3 + x_8 + M(1 - y) \geq 1 \\ & x_i, y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.30

Ορίζονται μεταβλητές  $x_{ij} \in \{0,1\}$  και  $y_j \in \{0,1\}$ , τέτοιες ώστε  $x_{ij} = 1$  μόνο εάν ο πωλητής  $i$  ανατεθεί στον πελάτη  $j$  και  $y_j = 1$  μόνο εάν χρησιμοποιηθεί ο πωλητής  $j$ . Το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1 + y_2 + \dots + y_m \\ \text{Υπ} \quad & x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{im} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_nx_{nj} \leq Uy_j \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & c_1x_{1j} + c_2x_{2j} + \dots + c_nx_{nj} \geq Ly_j \quad j = 1, 2, \dots, m \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.34

Ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης  $x_{ij}$  τέτοιες ώστε  $x_{ij} = 1$  εάν η εργασία  $i$  ανατεθεί στον εργαζόμενο  $j$ , διαφορετικά  $x_{ij} = 0$ . Επίσης ορίζονται δυαδικές μεταβλητές απόφασης  $y_j$ , τέτοιες ώστε  $y_j = 1$  εάν χρησιμοποιηθεί ο εργαζόμενος  $j$ , διαφορετικά  $y_j = 0$ .

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

Για να εξασφαλιστεί ότι οι εργασίες E1 και E4 θα ανατεθούν σε τουλάχιστον 2 εργαζόμενους θα πρέπει να εισαχθούν οι περιορισμοί:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 2 \quad \text{και} \quad x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \geq 2$$

Οι υπόλοιπες εργασίες θα πρέπει να ανατεθούν σε έναν εργαζόμενο η κάθε μία, οπότε:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

Για να μην τοποθετηθούν οι εργαζόμενοι Π2 και Π3 μαζί σε κάποια από τις εργασίες E1 και E4, θα πρέπει:

$$x_{12} + x_{13} \leq 1 \quad \text{και} \quad x_{42} + x_{43} \leq 1$$

Τέλος, για να διασφαλιστεί ότι κάθε εργαζόμενος  $i$  μπορεί να αναλάβει το πολύ 2 εργασίες, θα πρέπει:

$$x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} \leq 2y_i$$

Επομένως, το πλήρες ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\min y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5$$

$$\text{Υπό: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 2$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \geq 2$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1$$

$$x_{12} + x_{13} \leq 1$$

$$x_{42} + x_{43} \leq 1$$

$$x_{1i} + x_{2i} + x_{3i} + x_{4i} \leq 2y_i \quad i = 1, 2, \dots, 5$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.35

α) Η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$\max 100x_{11} + 50x_{12} + 60x_{21} + 30x_{22} + 40x_{31}$$

β) Περιορισμοί που εξασφαλίζουν ότι η κατασκευή κάθε ακινήτου θα ξεκινήσει σε ένα από τα 4 χρόνια:

$$\text{Ακίνητο 1: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$\text{Ακίνητο 2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$

$$\text{Ακίνητο 3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

Περιορισμοί που εξασφαλίζουν ότι σε κάθε έτος θα ξεκινά η κατασκευή μόνο ενός ακινήτου:

$$1\text{ος χρόνος: } x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1$$

$$2\text{ος χρόνος: } x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 1$$

$$3\text{ος χρόνος: } x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 1$$

$$4\text{ος χρόνος: } x_{14} + x_{34} \leq 1$$

Περιορισμοί για το προσωπικό που θα απασχολείται κάθε χρόνο:

$$1\text{ος χρόνος: } 30x_{11} + 20x_{21} + 20x_{31} \leq 60$$

$$2\text{ος χρόνος: } 30x_{12} + 30x_{12} + 20x_{21} + 20x_{22} + 20x_{31} + 20x_{32} \leq 60$$

$$3\text{ος χρόνος: } 30(x_{12} + x_{13}) + 20(x_{22} + x_{23}) + 20(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \leq 60$$

$$4\text{ος χρόνος: } 30x_{13} + 30x_{14} + 20x_{23} + 20x_{33} + 20x_{34} \leq 60$$

## ΑΣΚΗΣΗ B.36

Ορίζονται μεταβλητές  $x_{ij}$  που υποδεικνύουν την ποσότητα του καυσίμου  $i$  ( $i = 1$  για diesel,  $i = 2$  για απλή,  $i = 3$  για super) που θα μεταφερθεί στη δεξαμενή  $j$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) και δυαδικές μεταβλητές  $y_{ij} \in \{0, 1\}$ , τέτοιες ώστε εάν  $x_{ij} > 0$  τότε  $y_{ij} = 1$  (δηλαδή δείχνουν εάν καύσιμο τύπου  $i$  θα μεταφερθεί στη δεξαμενή  $j$ ). Συμβολίζοντας ως  $M_j$  τη χωρητικότητα της δεξαμενής  $j$  ( $M_1 = 9500, M_2 = 7500, M_3 = 6000, \dots$ ), το ακέραιο ΓΠ είναι:

$$\max \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 x_{ij}$$

$$\text{Υπό: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 10000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 13500$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 16000$$

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} \leq 1$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} \leq 1$$

$$y_{13} + y_{23} + y_{33} \leq 1$$

$$y_{14} + y_{24} + y_{34} \leq 1$$

$$y_{15} + y_{25} + y_{35} \leq 1$$

$$0 \leq x_{ij} \leq M_j y_{ij} \quad j = 1, \dots, 5$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}$$

Οι τρεις πρώτοι περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι η ποσότητα που θα μεταφερθεί από κάθε τύπο καυσίμου δεν θα υπερβεί τις ποσότητες των παραγγελιών. Οι επόμενοι πέντε εξασφαλίζουν ότι σε κάθε δεξαμενή θα μεταφερθεί το πολύ ένας τύπος καυσίμου. Τέλος, οι περιορισμοί  $x_{ij} \leq M_j y_{ij}$  εξασφαλίζουν ότι εάν  $x_{ij} > 0$ , τότε  $y_{ij} = 1$ .

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.1

1)  $\max -3x_1 - 2x_2$   
 un.  $x_1 \leq 4$   
 $x_1 + 3x_2 \leq 15$   
 $-2x_1 - x_2 \leq -10$   
 $x_1, x_2 \geq 0$

$C_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4
0	$\bar{2}$	1	3	0	1	0	15
0	$\bar{3}$	$\ominus 2$	-1	0	0	1	-10

  
 $C = -3 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0$   
 $\bar{C} = -3 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0 \quad Z=0$

(Δυνατός αλγόριθμος) →

$C_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	0	$\ominus 0.5$	1	0	0.5	-1
0	$\bar{2}$	0	2.5	0	1	0.5	10
-3	$\bar{1}$	1	0.5	0	0	-0.5	5

  
 $C = -3 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0$   
 $\bar{C} = 0 \ -0.5 \ 0 \ 0 \ -1.5 \quad Z=-15$

$C_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
-2	$\bar{2}$	0	1	-2	0	-1	2
0	$\bar{2}$	0	0	5	1	3	5
-3	$\bar{1}$	1	0	1	0	0	4

  
 $C = -3 \ -2 \ 0 \ 0 \ 0$   
 $\bar{C} = 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -2 \quad Z=-16$

Βέβαιον λίαν γιατί  $x_B \geq 0$

2) α) Τρεις βασικές λύσεις εύκολων οποίων μόνο η τελευταία είναι ΒΕΛ

β) Για την λύση του 1<sup>ου</sup> πίνακα  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$   
 " " " " 2<sup>ου</sup> "  $u_1 = u_2 = 0$  και  $u_3 = 1.5$   
 " " " " 3<sup>ου</sup> "  $u_1 = 1, u_2 = 0, u_3 = 2$

γ) Όλες

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.2

$\min y_1 + y_2 + y_3$   
 un.  $x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 + y_1 = -5$   
 $-2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + y_2 \geq 3$   
 $3x_1 - 2x_3 + 4x_4 + y_3 = -1$   
 $x_1, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

### ΑΣΚΗΣΗ Γ.3

(1) Το ΓΠ-Μ δεν μπορεί να είναι αδύνατο, γιατί η λύση  $x=0$  και  $y=b$  είναι προφανώς εφικτή

(2) Το δίστιμο είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ \text{υπ.} \quad & A^T u \geq c \\ & u \geq -Me \\ & u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν το ΓΠ-Μ είναι η φραγμένο το δίστιμο του είναι αδύνατο

(3)

Όχι γιατί το δίστιμο του ΓΠΑ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ \text{υπ.} \quad & A^T u \geq c \\ & u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Η μόνη διαφορά αυτού του ΓΠ από το δίστιμο του ΓΠ-Μ είναι ο περιορισμός  $u \geq Me$ . Αφού όπως το  $M$  είναι ένας μεγάλος αριθμός, τότε δεν υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει  $u \in \mathbb{R}$  ώστε  $u \geq -Me$ . Άρα εάν το δίστιμο του ΓΠ-Μ είναι αδύνατο οφθαίνει ότι οι περιορισμοί  $A^T u \geq c$  δεν είναι εφικτοί και άρα το δίστιμο του ΓΠΑ είναι επίσης αδύνατο. Επομένως το ΓΠΑ θα είναι είτε η φραγμένο είτε αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.4

1)

Πρωτεύων:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{υπ.} \quad & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Δυϊκό:

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ \text{υπ.} \quad & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & -b^T u \\ \text{υπ.} \quad & -A^T u \leq -c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα πρέπει: 1)  $c = -b$   
2)  $A = -A^T$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ \text{υπ.} \quad & 4x_2 \leq -3 \\ & -4x_1 \geq -2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Δυϊκό}} \quad \begin{aligned} \min \quad & -3u_1 - 2u_2 \\ \text{υπ.} \quad & -4u_2 \geq 3 \\ & 4u_1 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 2u_2 \\ \text{υπ.} \quad & 4u_2 \leq -3 \\ & -4u_1 \leq -2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2)

Το δυϊκό είναι:  $\min c^T u$   
 $\text{υπ.} \quad A^T u = c$

Αν  $A = A^T$  τότε κάθε εφικτή λύση του πρωτεύοντος είναι εφικτή και στο δυϊκό και αντίστροφα  $c^T x = c^T u$ . Άρα η  $x$  είναι βέλτιστη

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.5

1)

Περικλείει ο περικορισμός 2, γιατί η  $\bar{2}$  είναι βασική με τιμή 0 και  $y_{\bar{2}j} = 0$  για  $j=1, 2, 3, 4$ . Διαγράφοντας τις τεχνητές μεταβλητές διαμορφώνεται ο ακόλουθος πίνακας της φάσης II:

Βάση	1	2	3	4	$x_B$
1	1	0	0.5	0	2.5
2	0	1	1.17	0.33	5.83

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} y_{\bar{1}} & y_{\bar{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.13 \\ 0.29 & 0.09 \end{bmatrix}$$



2)

Στην περίπτωση αυτή δεν περιττεύει κάποιος περιορισμός. Για τη μετάβαση στη φάση II θα πρέπει να ελαχθεί από τη βάση η  $\bar{2}$  και έτσι δέσνη της να ελαχθεί η 4.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν ως οδηγό στοιχείο το  $y_{24} = -1$  ο νέος πίνακας simplex της φάσης I είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	1	1	0	0.5	0	0.13	0	-0.13	2.5
0	4	0	0	0	1	0.25	-1	-0.25	0
0	2	0	1	1.17	0	0.21	0.33	0.13	5.83
$c$ 0 0 0 0 -1 -1 -1									
$\bar{c}$ 0 0 0 0 -1 -1 -1									

Ο αρχικός πίνακας της φάσης II είναι:

Βάση	1	2	3	4	$x_B$
1	1	0	0.5	0	2.5
4	0	0	0	1	0
2	0	1	1.17	0	5.83

και ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1} = [y_{\bar{1}} \ y_{\bar{2}} \ y_{\bar{3}}] = \begin{bmatrix} 0.13 & 0 & -0.13 \\ 0.25 & -1 & -0.25 \\ 0.21 & 0.33 & 0.13 \end{bmatrix}$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.6

1)

Διότι:  $\min y = 0$   
 υπ.  $A^T u \geq c$   
 $u \geq 0$

2)

- Αν υπάρχει  $u \geq 0$  ώστε  $A^T u \geq c$  τότε το δύϊμό είναι εφικτό με  $y^* = 0$ . Άρα η λύση  $x=0$  που είναι εφικτή στο πρωτεύων είναι βέλτιστη
- Αν δεν υπάρχει  $u \geq 0$  ώστε  $A^T u \geq c$  τότε το δύϊμό είναι αδύνατο, άρα το πρωτεύων είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι αφού η λύση  $x=0$  είναι εφικτή, άρα το πρόβλημα είναι μη φραγμένο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.8

- (1) Λάθος : σε περίπτωση πολλαπλών βέλτιστων λύσεων κάθε σημείο μεταξύ δύο ΒΕΛ που είναι βέλτιστες είναι επίσης βέλτιστη λύση αλλά όχι ΒΕΛ
- (2) Το 1ο μέρος είναι σωστό καθώς προκύπτει από τη συμπληρωματική χαλαρότητα. Το δεύτερο είναι λάθος γιατί  $u_i = 0$  επίσης ικανοποιεί τη συμπληρωματική χαλαρότητα
- (3) Αφού υπάρχουν 2 ημίες και 2 προορισμοί, κάθε ΒΕΛ έχει 3 βασικές μεταβλητές. Στην προεφένη περίπτωση υπάρχουν 4 διαδρομές άρα αυτή δεν μπορεί να είναι ΒΕΛ και επομένως είναι λάθος
- (4) Λάθος : κάθε ΓΠ σε πρότυπη μορφή έχει λύση εάν και μόνο εάν και το δύϊμό του έχει λύση:  

$$\min b^T u$$

$$A^T u \geq c$$

Η αλλαγή του  $b$  δεν επηρεάζει την εφικτότητα του δύϊμου μπορεί να το κάνει όμως μη φραγμένο άρα το πρωτεύον μπορεί να γίνει αδύνατο αλλά όχι μη φραγμένο

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.12

- Με την αλλαγή του 6' μέλους οι τιμές των βασικών μεταβλ. γίνονται:  $x_{B_1} = 2 + 1 \cdot (-3) = -1$  και  $x_{B_2} = 2 + 1 \cdot 2 = 4$

Ο νέος πίνακας simplex είναι:

	1	2	3	1	2	
1	2					
5	1					
	0	1	5	5	-3	-1
	1	0	-3	-3	2	4
	5	1	-12	-M	0	
	0	0	-2	10-M	-7	$z=19$

Αυτή η λύση δεν είναι ~~εφικτή~~ εφικτή στο πρωτεύον όμως στο δύϊμο είναι εφικτή. Άρα εφαρμόζεται ο δύϊμος αλγόρ. simplex με εισερχόμενη την 2 στη θέση της 2. Ο νέος πίνακας είναι:

	1	2	3	1	2	
0	2					
5	1					
	0	-0.33	-1.67	-1.67	1	0.33
	1	0.67	0.33	0.33	0	3.33
	5	1	-12	-M	0	
	0	-0.33	-23.67	4.67-M	0	$z=16.67$

Η λύση αυτή είναι βέλτιστη γιατί  $x_B \geq 0$

### ΑΣΚΗΣΗ Γ.13

Με τις αλλαγές που γίνονται το ΓΠ γίνεται:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 \\ \text{υπ} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Το δuality είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & f = 7u_1 + 10u_2 \\ \text{υπ.} \quad & u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ & 2u_1 + 3u_2 \geq 7 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 3 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Η λύση  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0, 10/3, 0)$  είναι εφικτή στο πρωτεύον με  $z^* = 70/3$

Ομοίως η λύση  $(u_1^*, u_2^*) = (0, 7/3)$  είναι εφικτή στο δuality με  $f^* = 70/3$

Από θεωρήματα αδρότητας: δualityτητας αφού  $x^*, u^*$  είναι εφικτές στο πρωτεύον και στο δuality αντίστοιχα και  $z^* = f^*$ , εξάγεται το συμπέρασμα ότι η  $x^*$  είναι βέλτιστη.

Γιατί: Το θεώρημα αδρότητας δualityτητας λέει ότι εάν  $x, u$  εφικτές στο Π και Δ τότε:  $C^T x \leq b^T u$   
Εδώ οι  $x^*, u^*$  είναι εφικτές στο Π και Δ και  $C^T x^* = b^T u^*$   
Άρα  $C^T x \leq b^T u^* = C^T x^* \Rightarrow C^T x \leq C^T x^* \Rightarrow u, x^*$  είναι βέλτιστη

### ΑΣΚΗΣΗ Γ.16

α) Μια προφανής λύση είναι:

$$\begin{cases} x_i = c_i \text{ και } y_i = 0 \text{ για κάθε } c_i \leq 0 \\ x_i = 0 \text{ και } y_i = -c_i \text{ " " } c_i > 0 \end{cases}$$

β) Το δuality είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & G u_1 + G_2 u_2 \\ \text{υπ.} \quad & -b_1 \leq u_1 \leq -a_1 \\ & -b_2 \leq u_2 \leq -a_2 \\ & u_1, u_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Αν το δuality ήταν μη φραγμένο, τότε το πρωτεύον θα ήταν αδύνατο. Αυτό όμως δεν γίνεται γιατί το πρωτεύον είναι εφικτό.

γ) Θα πρέπει το δuality να είναι εφικτό, δηλαδή:

$$a_i \leq b_i$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.17

Ο αντίστροφος πίνακας της βάσης είναι:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι obvious γνωστό ότι:

$$Y = B^{-1}A \Rightarrow A = BY = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$x_B = B^{-1}b \Rightarrow b = Bx_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Επομένως οι περιορισμοί είναι:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 3$$

Επιπλέον η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής είναι:

$$17 = 2c_1 + c_3 \quad (1)$$

και το οριακό καθαρό εισόδημα της  $I$  είναι:

$$-1 = -c_1 + c_3 \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι  $c_1 = 6$  και  $c_3 = 5$

Το ΟΚΕ της  $x_2$  είναι:

$$-5 = c_2 - (-2c_1 + 5c_3) \Rightarrow c_2 = 8$$

Αντίστοιχα το ΟΚΕ της  $x_4$  είναι:

$$-2 = c_4 - (c_1 + c_3) \Rightarrow c_4 = 9$$

Άρα το τελικό ΓΠ είναι:

$$\max \quad 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4$$

$$\text{υπ.} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 5$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.18

$C_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	2	6	5	4	1	6
$C$ 2 3 4 2 0							
$\bar{C}$		2	3	4	2	0	0

$\theta_1 = 6/2 = 3 \rightarrow$  αύξηση της αντικειμενικής κατά  $\bar{C}_1 \times 3 = 6$

$\theta_2 = 6/6 = 1 \rightarrow$  "  $\bar{C}_2 \times 3 = 3$

$\theta_3 = 6/5 \rightarrow$  "  $\bar{C}_3 \times \frac{6}{5} = 24/5$

$\theta_4 = 6/4 \rightarrow$  "  $\bar{C}_4 \times \frac{6}{4} = 3$

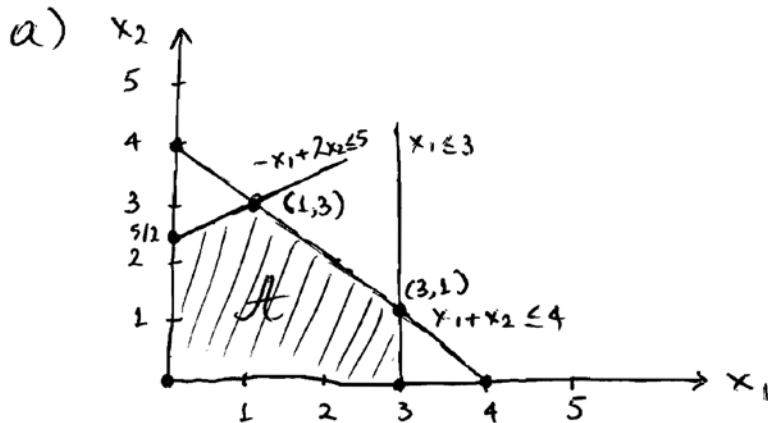
Εισάγεται η 1:

$C_B$	Βάση	1	2	3	4	$\bar{1}$	$x_B$
2	1	1	3	5/2	2	1/2	3
$C$ 2 3 4 2 0							
$\bar{C}$		0	-3	-1	-2	-1	6

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.19

- Ο δυικός αλγόριθμος χρησιμοποιείται γιατί όσο προχωρά η διαδικασία επίλυσης εισάγονται επηδόν περιθώριοι (ένα-ένα)
- Έχει ~~απώλειες~~  $m+n-1$  βασικές μεταβλητές  
ή: κάθε ΒΕΛ έχει <sup>το πολύ</sup>  $m+n-1$  διαδρομές
- Μεταβολές εντός ορίων είναι πιθανό να καταστήσουν το πρόβλημα αδύνατο. Αυτό διερευνάται με το δυικό αλγόριθμο
- Το ΓΠ της φάσης I είναι πάντα φραγμένο
- Αν η βέλτεστη λύση του πρωτεύοντος δεν είναι φοναδική, τότε η βέλτεστη λύση του δυικού είναι ευφωτισμένη (αλλά φοναδική)

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.20



$$f(0,0)=0 \quad f(1,3)=5$$

$$f(0,5/2)=5/2 \quad f(3,1)=7$$

$$f(3,0)=6$$

Άρα η λύση  $(3,1)$  είναι βέλτιστη. Επομένως, αφού καμία άλλη γειτονική ΒΒΔ δεν έχει ίδια τιμή στην αντικειμενική, είναι μοναδική βέλτιστη λύση.

β) Στη λύση αυτή είναι:

$$x_1=3, \quad x_2=1 \quad \text{και} \quad x_3=6$$

Αυτές είναι οι βασικές μεταβλητές, αφού είναι μη μηδενικές. Ο πίνακας της βάσης είναι:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

γ) Χρειάζεται ο αντίστροφος πίνακας της βάσης, ο οποίος βρίσκεται μάταια από τις μεταβλητές  $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ . Αφού οι  $\bar{1}, \bar{2}$  είναι στη βάση, ο αντίστροφος πίνακας είναι:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε, από τις σχέσεις  $y = B^{-1}A$  και  $x_B = B^{-1}b$ , ο πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	0	2	1	0	1	8
0	$\bar{2}$	0	1	0	1	-1	1
2	$\bar{3}$	1	0	0	0	1	3
$c$		2	1	0	0	0	
$z$		0	1	0	0	-2	6

Εισέρχεται η 2 και  
εξέρχεται η  $\bar{2}$

$C_B$	Βάση	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	0	0	1	-2	3	6
1	2	0	1	0	1	-1	1
2	$\bar{1}$	1	0	0	0	1	3
$C$ 2 1 0 0 0							
$\bar{C}$ 0 0 0 -1 -1							
							7

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση

$$\delta) K\Phi(C_2) = 1 + \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 \text{ και } A\Phi(C_2) = 1 + \left(\frac{-1}{-1}\right) = 2$$

ε) Ο συντελεστής της  $u_1$  στη συνάρτηση του διευκού αντιστοιχεί στο β' μέλος του 1ου περιορισμού. Οπότε υπολογίζονται τα  $K\Phi$ ,  $A\Phi$  για τον περιορισμό αυτό:

$$K\Phi(b_1) = 5 + \left(-\frac{6}{1}\right) = -1$$

$$A\Phi(b_1) = \infty \text{ (αφού δεν υπάρχει αρνητικό στοιχείο στη στήλη } \bar{1})$$

Άρα, τα φράγματα για το συντελεστή της  $u_1$  στη συνάρτηση του διευκού είναι:

$$K\Phi = -\infty \text{ και } A\Phi = 1$$

στ) Από το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας ξέρουμε ότι:

$$x^T \bar{u} = 0 \text{ και } u^T \bar{x} = 0$$

Επομένως:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \cdot u_{\bar{1}} = 0 \\ x_2 \cdot u_{\bar{2}} = 0 \\ x_{\bar{1}} \cdot u_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{\bar{1}} = 0 \\ u_{\bar{2}} = 0 \\ u_1 = 0 \end{array}$$

Αφού  $u_{\bar{1}} = u_{\bar{2}} = 0$ , οι περιορισμοί 1 και 2 του διευκού θα πρέπει να ικανοποιούνται ως ισότητες:

$$\left. \begin{array}{l} -u_1 + u_2 + u_3 = 2 \\ 2u_1 + u_2 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{u_1=0} \begin{array}{l} u_2 = 1 \\ u_3 = 1 \end{array}$$

Άρα η βέλτιστη λύση του διευκού είναι

$$u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.21

- 1) Το πρόβλημα είναι εφικτό γιατί η λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 4, 0)$  ικανοποιεί τους περιορισμούς
- 2) Η κανονική μορφή του ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll}\max & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{Υπ.} & -x_2 + x_3 \leq -4 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

Οπότε το δυικό είναι:

$$\begin{array}{ll}\min & -4u_1 - u_2 \\ \text{Υπ.} & \left. \begin{array}{l} -u_2 \geq -1 \\ -u_1 - u_2 \geq 2 \\ u_1 - u_2 \geq -1 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{ll}\max & 4u_1 + u_2 \\ \text{Υπ.} & \begin{array}{l} u_2 \leq 1 \\ u_1 + u_2 \leq -2 \\ -u_1 + u_2 \leq 1 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{array} \end{array}\end{array}$$

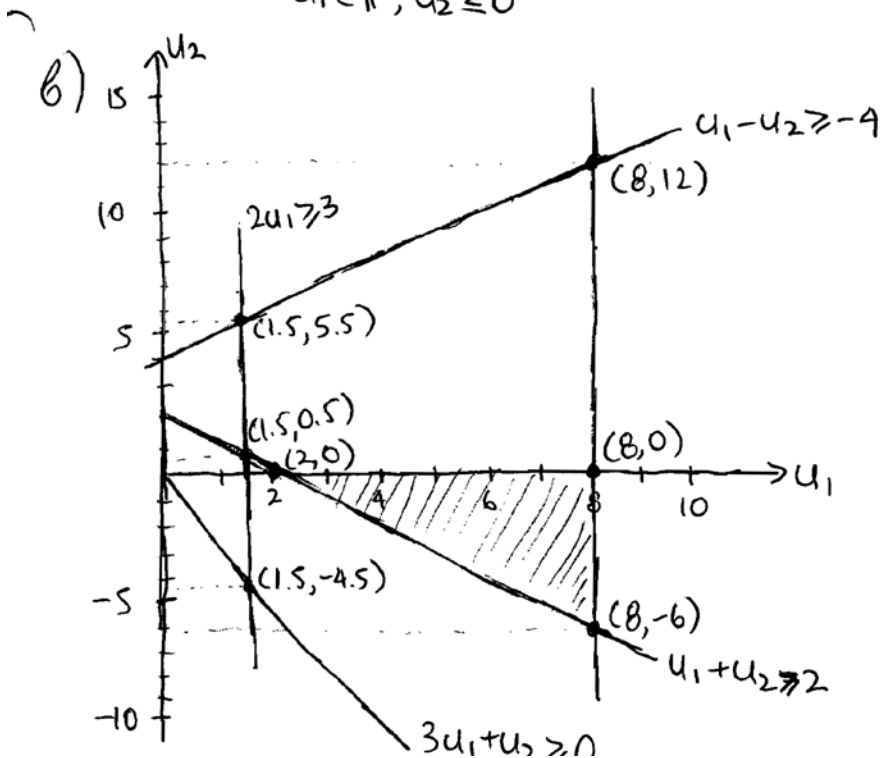
Το δυικό είναι αδύνατο γιατί δεν μπορεί να είναι  $u_1 + u_2 \leq -2$  όταν  $u_1, u_2 \geq 0$ .

- 3) Αφού το δυικό είναι αδύνατο, αυτό σημαίνει ότι το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Επειδή όμως στο ερώτημα (α) βρέθηκε ότι το πρωτεύον είναι εφικτό, τα παραπάνω δείχνουν ότι το πρωτεύον είναι μη φραγμένο



## ΑΣΚΗΣΗ Γ.22

α)  $\min 3u_1 + 2u_2$   
 un:  $3u_1 + u_2 \geq 0$   
 $u_1 - u_2 \geq -4$   
 $2u_1 \geq 3$   
 $u_1 + u_2 \geq 2$   
 $-u_1 \geq -8$   
 $u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \leq 0$



$$f(2, 0) = 6$$

$$f(8, 0) = 24$$

$$f(8, -6) = 12$$

Άρα το βέλτιστο  
είναι στο  $(8, 0)$

γ) Στη βέλτιστη λύση του δυϊκού βασικές είναι οι:

$$u_1, u_1, u_2, u_3, u_5$$

Μη βασικές είναι οι

$$u_2, u_4$$

Άρα στο πρωτεύον οι  $x_2$  και  $x_4$  είναι βασικές.  
 Ο πίνακας της βάσης είναι

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Άρα η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι:

$$x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.23

1) Το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με το δυϊκό αλγόριθμο, εφόσον γραφτεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & -1/3x_1 - x_2 \\ \text{υ.π.} \quad & -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_{\bar{1}} = -15 \\ & -x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_{\bar{2}} = -12 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ο πρώτος πίνακας simplex είναι:

$c_B$	Βάση	1	2	3	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$x_B$
0	$\bar{1}$	-1	-3	1	1	0	-15
0	$\bar{2}$	-1	-6	-3	0	1	-12
$c$		-1/3	-1	0	0	0	
$\bar{c}$		-1/3	-1	0	0	0	0

Εξάγεται η  $\bar{1}$  και εισέρχεται είτε η 1 είτε η 2.

2) Στη λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$  η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 5. Στη λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$  η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι επίσης 5. Επομένως, αφού η λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$  το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και με τη λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$ .

Αφού υπάρχουν δύο βέλτιστες λύσεις, εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις.

Στη λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (7.5, 2.5, 0)$  οι μεταβλητές απόκλισης είναι  $x_{\bar{1}} = 0$  και  $x_{\bar{2}} = 10.5$ . Επομένως η λύση αυτή δεν είναι βασική εφικτή, γιατί υπάρχουν 3 μη μηδενικές μεταβλητές, ενώ κάθε βάση στο συγκεκριμένο ΓΠ έχει 2 βασικές μεταβλητές. Άρα δεν θα μπορούσε να βρεθεί ως βέλτιστη.

3) Στη λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (15, 0, 0)$  οι μεταβλητές απόκλισης είναι  $x_{\bar{1}} = 0$  και  $x_{\bar{2}} = 3$ . Επομένως με βάση το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \begin{aligned} u_2 x_{\bar{2}} = 0 &\Rightarrow u_2 = 0 \\ x_1 u_{\bar{1}} = 0 &\Rightarrow u_{\bar{1}} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_2 &= 0 \\ u_1 + u_2 &= -1/3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_2 &= 0 \\ u_1 &= -1/3 \end{aligned} \right\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.24

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3u_1 - 5u_2 + 2u_3 \\ \text{υ.π.} \quad & u_1 + 2u_3 \geq -3 \\ & -2u_1 + u_2 - 3u_3 \geq -2 \\ & 3u_1 + 3u_2 - 7u_3 = 3 \\ & 4u_1 + 4u_2 - 4u_3 \leq -4 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2 \leq 0 \\ & u_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 2) Το σωστό είναι το Γ, δηλαδή  $u_1 = 0$ .
- 3) Το σωστό είναι τα Α ή Γ, δηλαδή  $-3x_1^* - 2x_2^* + 3x_3^* - 4x_4^* \leq 9.5$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.25

- 1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & 3u_1 + u_2 + 2u_3 \\ \text{υ.π.} & u_2 + 2u_3 \geq -3 \\ & u_1 + 3u_3 \geq 1 \\ & 2u_1 - 3u_2 \geq 2 \\ & u_1 \geq 0 \\ & u_2, u_3 \leq 0 \end{array}$$

- 2) Το δυϊκό μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \max & -3u_1 + u'_2 + 2u'_3 \\ \text{υ.π.} & u'_2 + 2u'_3 \leq 3 \\ & u_1 - 3u'_3 \geq 1 \\ & 2u_1 + 3u'_2 \geq 2 \\ & u_1, u'_2, u'_3 \geq 0 \end{array}$$

Όπως φαίνεται αυτή η διατύπωση του δυϊκού είναι ίδια με το πρωτεύον. Επομένως η λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 0)$  που είναι εφικτή στο πρωτεύον, είναι εφικτή και στο δυϊκό ( $u_1 = 1$ ,  $u'_2 = 3$ ,  $u'_3 = 0$ ). Επιπλέον στη λύση αυτή, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος και του δυϊκού είναι ίση με 0. Επομένως, η λύση  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 0)$  είναι βέλτιστη στο πρωτεύον και η μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 0.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.26

- 1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & u_1 \\ \text{υ.π.} & u_1 \geq 2 \\ & -u_1 \geq -4 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

Η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι η  $u_1 = 2$

- 2) Σύμφωνα με τη βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι  $(u_1, u_1, u_2) = (2, 0, 2)$ . Επομένως σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 x_1 = 0 \\ u_2 x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

- 3) Το δυϊκό γίνεται αδύνατο εάν  $c_1 > 4$ . Στην περίπτωση αυτή το πρωτεύον θα είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι, γιατί η λύση  $x_1 = x_2 = 0$  είναι εφικτή. Επομένως, εάν  $c_1 > 4$ , τότε το πρωτεύον ΓΠ είναι μη φραγμένο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.27

- 1) Το ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 10x_{11} + 5x_{12} + 15x_{13} + 7x_{21} + 20x_{22} + 9x_{23} \\ \text{υ.π.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 50 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} = 30 \\ & x_{11} + x_{21} = 20 \\ & x_{12} + x_{22} = 20 \\ & x_{13} + x_{23} = 40 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{aligned}$$

- 2) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 50u_1 + 30u_2 + 20u_3 + 20u_4 + 40u_5 \\ \text{υ.π.} \quad & u_1 + u_3 \geq -10 \\ & u_1 + u_4 \geq -5 \\ & u_1 + u_5 \geq -15 \\ & u_2 + u_3 \geq -7 \\ & u_2 + u_4 \geq -20 \\ & u_2 + u_5 \geq -9 \\ & u_j \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 3) Σύμφωνα με τη λύση που δίνεται είναι  $x_{11} = 20$ ,  $x_{12} = 20$ ,  $x_{13} = 10$ ,  $x_{23} = 30$  με κόστος 720. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} x_{11}u_{\bar{1}} = 0 \\ x_{12}u_{\bar{2}} = 0 \\ x_{13}u_{\bar{3}} = 0 \\ x_{23}u_{\bar{6}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_{\bar{1}} = 0 \\ u_{\bar{2}} = 0 \\ u_{\bar{3}} = 0 \\ u_{\bar{6}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 + u_3 = -10 \\ u_1 + u_4 = -5 \\ u_1 + u_5 = -15 \\ u_2 + u_5 = -9 \end{array} \right\}$$

Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει 5 αγνώστους, αλλά όπως είναι γνωστό ένας από τους περιορισμούς σε ένα πρόβλημα μεταφοράς περιττεύει. Αν λοιπόν θεωρηθεί ότι περιττεύει ο 1<sup>ος</sup> περιορισμός στο ΓΠ του ερωτήματος (1), τότε θα πρέπει  $u_1 = 0$ . Οπότε, προκύπτει η ακόλουθη λύση του δυϊκού:

$$u_2 = 6 \quad u_3 = -10 \quad u_4 = -5 \quad u_5 = -15$$

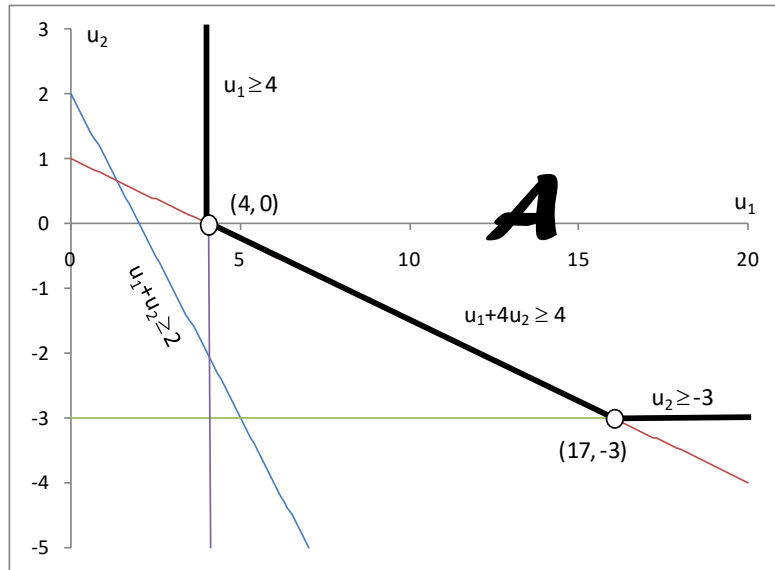
Η λύση αυτή ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του δυϊκού και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι 720, δηλαδή ταυτίζεται με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος για το πλάνο μεταφοράς που δίνεται. Επομένως, το πλάνο μεταφοράς είναι βέλτιστο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.28

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4u_1 + 8u_2 \\ \text{υ.π.} \quad & u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1 + 4u_2 \geq 4 \\ & u_1 \geq 4 \\ & u_2 \geq -3 \\ & u_1, u_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) Η γραφική αναπαράσταση του δυϊκού είναι:



Το σύνολο των εφικτών λύσεων βρίσκεται στην περιοχή  $A$ . Συγκρίνοντας τις δύο ΒΕΛ  $(4, 0)$  και  $(17, -3)$  που οριοθετούν στο σύνολο των εφικτών λύσεων βρίσκεται ότι βέλτιστη λύση είναι η  $(4, 0)$  με  $4u_1 + 8u_2 = 16$ .

3) Στη βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι:  $u_1 = 2$ ,  $u_4 = 3$ . Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας:

$$\left. \begin{aligned} x_1 u_1 &= 0 \\ x_4 u_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_2 &= 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 2 \end{aligned} \right\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.29

1) Το δυϊκό είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 25u_1 + 20u_2 \\ \text{Υπό:} \quad & 6u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ & 3u_1 + 4u_2 \geq 1 \\ & 5u_1 + 5u_2 \geq 4 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2) Σύμφωνα με τη λύση του ΓΠ είναι  $x_1, x_3 > 0$ , οπότε με βάση το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left. \begin{aligned} x_1 u_1 &= 0 \\ x_3 u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 6u_1 + 3u_2 &= 3 \\ 5u_1 + 5u_2 &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_1 &= 0.2 \\ u_2 &= 0.6 \end{aligned} \right\}$$

- 3) Με την εισαγωγή της νέας μεταβλητής, το ΓΠ και το δυϊκό του διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \min & 25u_1 + 20u_2 \\ \max & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ \text{Υπό:} & 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Υπό:} & 6u_1 + 3u_2 \geq 3 \\ & 3u_1 + 4u_2 \geq 1 \\ & 5u_1 + 5u_2 \geq 4 \\ & 6u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

Ο νέος περιορισμός  $6u_1 + 2u_2 \geq 2$  που εισάγεται στο δυϊκό ικανοποιείται από τη λύση (του δυϊκού) που βρέθηκε στο ερώτημα (β), καθώς για  $u_1 = 0.2$  και  $u_2 = 0.6$  είναι  $6u_1 + 2u_2 = 2.4 > 2$ . Επομένως, η  $(x_1, x_2, x_3) = (5/3, 0, 3)$  παραμένει βέλτιστη στο πρωτεύον, γιατί η λύση  $(u_1, u_2) = (0.2, 0.6)$  είναι εφικτή στο (νέο) δυϊκό και οι αντικειμενικές συναρτήσεις των δύο ΓΠ ταυτίζονται.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.30

- 1) Το ΓΠ με όλους τους περιορισμούς σε μορφή  $\leq$  και το δυϊκό του είναι:

$$\begin{array}{ll} \text{Πρωτεύον:} & \Delta\text{υϊκό:} \\ \max & -y_1 - y_2 + z \\ \text{Υπό:} & -x_0 - 7x_1 - 4x_2 + z \leq 0 \\ & x_0 + 4x_1 + 9x_2 + z \leq 0 \\ & x_1 - y_1 \leq 0 \\ & -x_1 - y_1 \leq 0 \\ & x_2 - y_2 \leq 0 \\ & -x_2 - y_2 \leq 0 \\ & x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2, z \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \min & 0 \\ \text{Υπό:} & -u_1 + u_2 = 0 \quad (\text{μεταβλητή } x_0) \\ & -7u_1 + 4u_2 + u_3 - u_4 = 0 \quad (\text{μεταβλητή } x_1) \\ & -4u_1 + 9u_2 + u_5 - u_6 = 0 \quad (\text{μεταβλητή } x_2) \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \quad (\text{μεταβλητή } z) \\ & u_3 + u_4 \leq 1 \quad (\text{μεταβλητή } y_1) \\ & u_5 + u_6 \leq 1 \quad (\text{μεταβλητή } y_2) \\ & u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \geq 0 \end{array}$$

- 2) Από τον 1<sup>ο</sup> περιορισμό προκύπτει ότι  $u_1 = u_2$ . Αντικαθιστώντας στους άλλους περιορισμούς:

$$\begin{aligned} u_1 &= (u_3 - u_4) / 3 \\ u_1 &= (u_6 - u_5) / 5 \\ u_1 &\geq 0.5 \\ u_3 + u_4 &\leq 1 \\ u_5 + u_6 &\leq 1 \\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Από τις ανισότητες 1 και 3 προκύπτει ότι:

$$\frac{u_3 - u_4}{3} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow u_3 - u_4 + 2u_4 \geq \frac{3}{2} + 2u_4 \Rightarrow u_3 + u_4 \geq \frac{3}{2} + 2u_4$$

Επειδή όμως  $u_4 \geq 0$  αυτό σημαίνει ότι  $u_3 + u_4 > 1$ , το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον περιορισμό  $u_3 + u_4 \leq 1$ .

Επομένως το δυϊκό είναι αδύνατο. Αυτό σημαίνει ότι το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Αδύνατο όμως δεν μπορεί να είναι γιατί η λύση  $x_0 = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z = 0$  είναι εφικτή. Άρα εξάγεται το συμπέρασμα ότι το πρωτεύον δεν είναι φραγμένο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.31

- 1) Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4u_2 \\ \text{Υπ} \quad & u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 = 1 \\ & u_1 + 3u_2 - u_3 \geq 3 \\ & u_1 + u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \in \mathbb{R}, u_3 \leq 0 \end{aligned}$$

- 2) Από τους περιορισμούς 2 και 4 του δυϊκού προκύπτει ότι:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 1 + u_2 \\ u_1 &= 1 - u_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_2 = -u_3$$

Αντικαθιστώντας  $u_1 = 1 + u_2$  στους περιορισμούς 1 και 3:

$$\left. \begin{aligned} 1 + u_2 + 2u_2 + u_3 &\geq 2 \\ 1 + u_2 + 3u_2 - u_3 &\geq 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3u_2 + u_3 &\geq 1 \\ 4u_2 - u_3 &\geq 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_2 &\geq 1/2 \\ u_2 &\geq 2/5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_2 \geq 1/2$$

Επειδή σύμφωνα με την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της μεταβλητής  $u_2$ , αυτό σημαίνει ότι  $u_2 = 1/2$  και επομένως η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι:

$$u_1 = 3/2 \quad u_2 = 1/2 \quad u_3 = -1/2$$

Στη λύση αυτή η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι ίση με 2, άρα και η βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος θα είναι επίσης 2.

- 3) Στην περίπτωση αυτή η αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού γίνεται:

$$\min \quad -4u_2$$

Στην περίπτωση αυτή η λύση  $u_2 = +\infty$ ,  $u_1 = 1 + \infty$  και  $u_3 = -\infty$  ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς και επιπλέον και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι  $-\infty$ . Επομένως το δυϊκό είναι μη φραγμένο και άρα το δοθέν ΓΠ είναι αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.32

- 1) Αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση του ΓΠ σε μορφή μεγιστοποίησης, το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & -u_1 - u_2 - u_3 - u_4 \\ \text{Υπ} \quad & -u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ & -a_1u_1 - a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = 0 \\ & -b_1u_1 - b_2u_2 + b_3u_3 + b_4u_4 = 0 \\ & u_1 \leq 1 \\ & u_2 \leq 1 \\ & u_3 \leq 1 \\ & u_4 \leq 1 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- 2) Η λύση που δίνεται είναι εφικτή στο πρωτεύον και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στη λύση αυτή είναι ίση με  $-4$  (θεωρώντας ότι η αντικειμενική συνάρτηση είναι σε μορφή μεγιστοποίησης). Εάν  $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$  και  $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$ , τότε η λύση  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$  είναι εφικτή στο δυϊκό και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού είναι ίση με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος ( $-4$ ). Επομένως, η λύση που δίνεται είναι βέλτιστη για το πρωτεύον.

### Εναλλακτικά:

Η λύση που δίνεται είναι εφικτή στο πρωτεύον και επειδή  $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$ , από το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας προκύπτει ότι  $u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$ , δηλαδή  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ . Εάν  $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$  και  $b_1 + b_2 = b_3 + b_4$ , τότε, αυτή η λύση που προκύπτει μέσω της συμπληρωματικής χαλαρότητας είναι εφικτή στο δυϊκό, άρα η λύση που δίνεται είναι βέλτιστη για το πρωτεύον.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.33

1. Το δυϊκό είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & u_4 \\ \text{Υπ} & -u_1 + u_2 - u_4 \leq -1 \\ & -u_2 + u_3 - u_4 \leq -1 \\ & u_1 \geq -5 \\ & u_2 \geq -5 \\ & u_3 \geq -5 \\ & u_1 \leq -1 \\ & u_2 \leq -1 \\ & u_3 \leq -1 \\ & u_1, u_2, u_3, u_4 \leq 0 \end{array}$$

2. Βάσει της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 u_1 = 0 \\ x_2 u_2 = 0 \\ x_5 u_5 = 0 \\ x_6 u_6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_5 = 0 \\ u_6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -u_1 + u_2 - u_4 = -1 \\ -u_2 + u_3 - u_4 = -1 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_2 - u_4 = -2 \\ -u_2 - u_4 = 4 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_2 = -3 \\ u_4 = -1 \\ u_3 = -5 \\ u_1 = -1 \end{array} \right\}$$

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.34

1. Αλλάζοντας την αντικειμενική συνάρτηση σε μορφή μεγιστοποίησης, το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll} \min & -2u_1 + 4u_2 + 6u_3 \\ \text{Υπ} & u_1 - 2u_2 + u_3 \leq -2 \\ & u_1 - u_3 \leq -1 \\ & -u_2 + u_3 = -1 \\ & 2u_1 - u_2 \geq -3 \\ & u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \geq 0, u_3 \leq 0 \end{array}$$

2. Αφού  $x_2, x_3, x_4 \neq 0$  θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 u_2 = 0 \\ x_3 u_3 = 0 \\ x_4 u_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 - u_3 = -1 \\ -u_2 + u_3 = -1 \\ 2u_1 - u_2 = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_1 = -1 \\ u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \end{array} \right\}$$

3. Η διαγραφή του 3ου περιορισμού αντιστοιχεί σε διαγραφή της μεταβλητής απόφασης  $u_3$  στο δυϊκό. Όμως, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα, είναι ήδη  $u_3 = 0$ , άρα δεν αλλάζει κάτι ούτε στη λύση του δυϊκού αλλά ούτε και στο πρωτεύοντος.



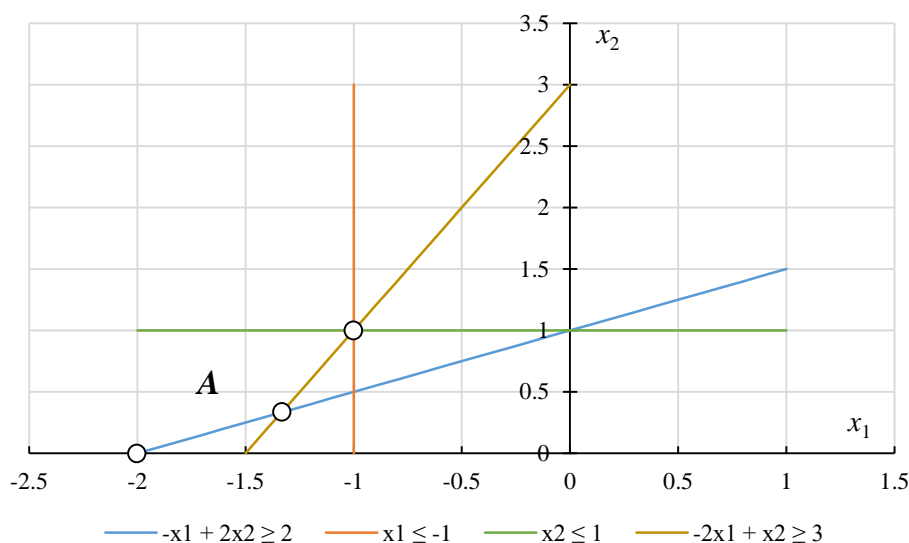
Παρότι η λύση παραμένει βέλτιστη δεν είναι βασική εφικτή λύση, καθώς έχει τρεις μεταβλητές μη μηδενικές (άρα βασικές), ενώ μετά τη διαγραφή του 3<sup>ου</sup> περιορισμού το νέο ΓΠ έχει πλέον δύο περιορισμούς, άρα κάθε βασική εφικτή λύση θα πρέπει να έχει δύο βασικές μεταβλητές.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.35

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2u_1 - u_2 + u_3 + 3u_4 \\ \text{Υπ} \quad & -u_1 + u_2 - 2u_4 = 3 \\ & 2u_1 + u_3 + u_4 \geq -4 \\ & u_1, u_4 \leq 0, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2. Η γραφική αναπαράσταση είναι:



Το σύνολο των εφικτών λύσεων είναι η περιοχή  $A$ , η οποία έχει ως κορυφές τα σημεία  $(-1, 1)$ ,  $(-4/3, 1/3)$  και  $(-2, 0)$ . Στο 1<sup>ο</sup> σημείο η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με  $-7$ , στο 2<sup>ο</sup> είναι  $-5.33$  και στο 3<sup>ο</sup> είναι  $-6$ . Άρα η βέλτιστη λύση είναι η  $(x_1, x_2) = (-4/3, 1/3)$ .

Αφού στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος είναι  $x_1, x_2 \neq 0$ , σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα θα πρέπει:

$$\left. \begin{aligned} x_1 u_1 &= 0 \\ x_2 u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} -u_1 + u_2 - 2u_4 &= 3 \\ 2u_1 + u_3 + u_4 &= -4 \end{aligned}$$

Επιπλέον, στη βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος οι περιορισμοί 2 και 3 ( $x_1 \leq -1$  και  $x_2 \leq 1$ ) ικανοποιούνται ως αυστηρές ανισότητες, οπότε  $x_2, x_3 > 0$ . Σύμφωνα με τη συμπληρωματική χαλαρότητα αυτό σημαίνει ότι  $x_2 u_2 = 0$  και  $x_3 u_3 = 0$ , δηλαδή  $u_2 = u_3 = 0$ . Επομένως, το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\left. \begin{aligned} -u_1 - 2u_4 &= 3 \\ 2u_1 + u_4 &= -4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} u_1 &= -5/3 \\ u_4 &= -2/3 \end{aligned}$$

Δηλαδή, η βέλτιστη λύση του δυϊκού είναι  $u_2 = u_3 = 0$  και  $u_1 = -5/3$ ,  $u_4 = -2/3$

3. Εάν η αντικειμενική συνάρτηση γίνει σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε η λύση  $(x_1, x_2) = (-\infty, 0)$  ικανοποιεί τους περιορισμούς και η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται ίση με  $-\infty$ . Οπότε το ΓΠ δεν είναι φραγμένο και το δυϊκό είναι αδύνατο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.36

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\begin{array}{ll}\min & -2u_1 - 4u_2 \\ \text{Υπ} & u_1 + 2u_2 \leq -2 \\ & u_1 \leq -1 + \lambda \\ & u_2 = -1 \\ & 2u_1 + u_2 \geq -4 \\ & u_1 \in \mathbb{R}, u_2 \leq 0\end{array}$$

2. Αντικαθιστώντας το  $u_2 = -1$  (3<sup>ος</sup> περιορισμός) τους περιορισμούς προκύπτουν τα εξής:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \leq 0 \\ u_1 \leq -1 + \lambda \\ 2u_1 \geq -3 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq u_1 \leq -1 + \lambda \quad (\text{A})$$

Από την αντικειμενική συνάρτηση του δυϊκού είναι εμφανές ότι η τιμή της μεταβλητής απόφασης  $u_1$  θα πρέπει να είναι η μεγαλύτερη δυνατή.

Διακρίνονται οι ακόλουθες περιπτώσεις ανάλογα με τις πιθανές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ :

- 1<sup>η</sup> περίπτωση:  $\lambda > -1/2$

Στην περίπτωση αυτή η μέγιστη δυνατή τιμή για τη μεταβλητή απόφασης  $u_1$  είναι  $u_1 = -1 + \lambda$ .

Αντικαθιστώντας τα  $u_1$  και  $u_2$  στους περιορισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες τιμές για τις μεταβλητές απόκλισης:  $u_1 = 1 - \lambda > 0$  και  $u_4 = 2\lambda + 1 > 0$

Σύμφωνα με το θεώρημα της συμπληρωματικής χαλαρότητας θα πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 x_1 = 0 \\ u_4 x_4 = 0 \\ u_2 x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_4 = x_2 = 0$$

Άρα οι περιορισμοί του πρωτεύοντος μπορούν να διαμορφωθούν ως εξής:

$$\begin{array}{l} x_2 = -2 \\ x_3 = -4 \end{array}$$

Αυτή είναι η βέλτιστη λύση του πρωτεύοντος αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς και τις συνθήκες της συμπληρωματικής χαλαρότητας.

- 2<sup>η</sup> περίπτωση:  $\lambda = -1/2$

Οι λύσεις του πρωτεύοντος και του δυϊκού που βρέθηκαν παραπάνω ικανοποιούν τους περιορισμούς και οι αντικειμενικές συναρτήσεις των δύο ΓΠ ταυτίζονται. Επομένως, η παραπάνω λύση παραμένει βέλτιστη.

- 3<sup>η</sup> περίπτωση:  $\lambda < -1/2$

Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες (A) είναι αδύνατες. Δηλαδή το δυϊκό είναι αδύνατο, οπότε το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Επειδή όμως το πρωτεύον έχει εφικτή λύση (πχ. η λύση της 1<sup>ης</sup> περίπτωσης), εξάγεται το συμπέρασμα ότι είναι μη φραγμένο.

## ΑΣΚΗΣΗ Γ.37

1. Το δυϊκό ΓΠ είναι:

$$\left. \begin{array}{ll} \min & 0u_1 + 0u_2 \\ \text{Υπ} & -2u_1 + \frac{1}{3}u_2 \geq 2 \\ & -9u_1 + u_2 \geq 3 \\ & u_1 - \frac{1}{3}u_2 \geq 1 \\ & 9u_1 - 2u_2 \geq 12 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A})$$

Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε αλλάζοντας τα πρόσημα στην αντικειμενική συνάρτηση, αυτή διατυπώνεται ως  $\max -2x_1 - 3x_2 - x_3 - 12x_4$ . Οπότε το δυϊκό είναι:

$$\left. \begin{array}{ll} \min & 0u_1 + 0u_2 \\ \text{Υπ} & -2u_1 + \frac{1}{3}u_2 \geq -2 \\ & -9u_1 + u_2 \geq -3 \\ & u_1 - \frac{1}{3}u_2 \geq -1 \\ & 9u_1 - 2u_2 \geq -12 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B})$$

2. Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή μεγιστοποίησης, τότε προσθέτοντας τους περιορισμούς 1 και 3 του δυϊκού ΓΠ (Α) προκύπτει ότι  $-u_1 \geq 3$ , το οποίο είναι αδύνατο αφού  $u_1 \geq 0$ . Άρα το δυϊκό είναι αδύνατο και επομένως το πρωτεύον είναι αδύνατο ή μη φραγμένο. Το πρωτεύον όμως είναι εφικτό, αφού η λύση  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  ικανοποιεί τους περιορισμούς. Άρα η μόνη εκδοχή που απομένει είναι ότι το πρωτεύον είναι μη φραγμένο.

Εάν το ΓΠ είναι σε μορφή ελαχιστοποίησης, τότε η λύση  $u_1 = u_2 = 0$  ικανοποιεί τους περιορισμούς του δυϊκού. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του δυϊκού για τη λύση αυτή είναι ίση με 0, όση και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του πρωτεύοντος για τη λύση  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ . Άρα η λύση  $u_1 = u_2 = 0$  είναι βέλτιστη στο δυϊκό ΓΠ και αντίστοιχα η λύση  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$  είναι βέλτιστη στο πρωτεύον ΓΠ.